III TUTORIAL Z METOD OBLICZENIOWYCH

ALGORYTMY ROZWIĄZYWANIA UKŁADÓW RÓWNAŃ LINIOWYCH

Opracowanie:
Agata Smokowska
Marcin Zmuda Trzebiatowski

Koło Naukowe Mechaniki Budowli KOMBO

Spis treści:

1. Wstęp do równań liniowych

Umiejętność rozwiązywania układów równań liniowych jest niezbędna przy rozwiązywaniu problemów analizy konstrukcji. Ręczne wykonanie obliczeń byłoby bardzo pracochłonne. Dużym ułatwieniem jest zastosowanie metod numerycznych, które umożliwiają automatyzację obliczeń i przeprowadzenie ich przy pomocy programów komputerowych, w naszym przypadku programu MATLAB.

W dzisiejszej prezentacji będziemy rozpatrywać układ równań liniowych zawierający *n* niewiadomych x_n w postaci:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = p_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = p_2 \\ \qquad\qquad\qquad \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = p_n \end{cases}$$

c.d. wstęp do równań liniowych

Układ zapisujemy w formie:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & \dots & \dots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \dots \\ p_n \end{Bmatrix}$$

przyjmujemy oznaczenia:

A – macierz współczynników ukladu a_{nn}

X – składowe wektora niewiadomych x_n

P – wektor wyrazów wolnych

Celem obliczeń jest wyznaczenie wektora niewiadomych ***X***

$$A\ X = P \rightarrow X$$

W dalszej części prezentacji opisanych jest pięć metod numerycznych rozwiązania układu równań liniowych wraz z przykładami w programie MATLAB.

2. Metody eliminacyjne

2.1. Metoda eliminacji Gaussa

Rozwiązanie metodą eliminacji Gaussa dzielimy na dwa etapy.

Etap pierwszy polega na przekształceniu pełnej macierzy współczynników ***A*** do macierzy trójkątnej (tzw. eliminacja/krok w przód).

Elementy przekształcamy zgodnie z zależnością:

$$a_{ij}^{(k)} = a_{ij}^{(k-1)} - \frac{a_{ik}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}} \left(a_{kj}^{(k-1)} \right)$$

gdzie:

k = 1,2,…,n-1 – bieżący krok eliminowanego układu

i = k+1, i = k+2, n, j = k+1, k+2, …, n+1 – indeksy numeru wiersza i kolumny

a_{ij} – współczynniki rozszerzonej macierzy układu $\tilde{\boldsymbol{A}}$

$$\underset{nx(n-1)}{\tilde{\mathrm{A}}} = \left[\underset{nxn}{\mathrm{A}} \;\middle|\; \underset{nx1}{\mathrm{P}} \right]$$

c.d. 2. Metody eliminacyjne

Drugi etap rozwiązania polega na znalezieniu wartości niewiadomych x_i. W tym celu posługujemy się przekształconą macierzą współczynników

$$x_i = \frac{1}{a_{ii}^{(i-1)}}\left(a_{i,n+1} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}^{(i-1)} \cdot x_j\right)$$

gdzie:

i = n, n-1, …, 1

Uwagi:

- Jeżeli dla det $A \neq 0$ pewien dzielnik $a_{kk}^{(k-1)} = 0$ należy przestawić wiersze, tak aby na głównej przekątnej eliminowanego równania występował element różny od zera $a_{kk}^{(k-1)} \neq 0$.
- Jeżeli det $A = 0$, to zamiana wierszy nie usunie dzielenia przez zero.

c.d. 2. Metody eliminacyjne

- W efekcie eliminacji wyrazy na głównej przekątnej macierzy współczynników ***A*** zawsze przyjmują wartość jedynki. W ich miejsce można zapamiętać dzielniki $d_k = a_{kk}^{(k-1)}$, które mogą posłużyć do obliczenia wyznacznika macierzy ***A***

det ***A*** = $\mathcal{E} * \prod_{k=1}^{n} d_k$

$$\mathcal{E} = \begin{cases} 1 - \text{parzysta liczba przestawień wierszy} \\ \qquad\qquad \text{(lub brak przestawień)} \\ -1 - \text{nieparzysta liczba przestawień wierszy} \end{cases}$$

- Jeżeli macierz współczynników jest dodatnio określona

$$\bigwedge_{\substack{X \in V \\ X \neq 0}} X^T A X > 0$$

c.d. 2. Metody eliminacyjne

to wszystkie dzielniki $d_k>0$ i otrzumujemy algorytm bez przestawień wierszy

- Liczba operacji arytmetycznych niezbędnych do rozwiązania układu *n* równań metodą elminacji Gaussa jest rzędu n^3

c.d. 2. Metody eliminacyjne

2.2. Metoda Jordana

W tej metodzie przekształcamy macierz współczynników poszerzoną o wektor prawych stron tak, aby już na etapie eliminacji przekształcić ją w macierz jednostkową.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & p_1 \\ & & \dots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & p_n \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & \overline{p_1} \\ & & \dots & & \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \overline{p_n} \end{bmatrix}$$

$$AX = P \;\rightarrow\; \bar{P}AX$$

c.d. 2. Metody eliminacyjne

Redukcję przeprowadzamy w całej j-tej kolumnie, wykorzystując wzory:

$$dla\ k = 1,2, \dots , n$$

$$a_{kj}^{(k)} = \frac{a_{kj}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}} \qquad j = 1,2, \dots , n + 1$$

$$a_{ij}^{(k)} = a_{ij}^{(k-1)} - a_{ik}^{(k-1)} * a_{kj}^{(k-1)}$$

$$j = 1,2, \dots , n + 1$$

$$i = 1,2, \dots , n \ (i \neq k)$$

3. Metody dekompozycyjne

W metodzie dekompozycyjnej rozkładamy macierz współczynników układu równań liniowych na dwie macierze trójkątne. Korzystamy z faktu, że każdą macierz kwadratową ***A*** możemy rozłożyć na iloczyn dwóch macierzy trójkątnych ***L*** i ***U***.

$$\underset{n*n}{\mathrm{A}} = \underset{n*n}{\mathrm{L}} * \underset{n*n}{\mathrm{U}}$$

$$\underset{\mathrm{A}}{\begin{bmatrix} \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{bmatrix}} = \underset{\mathrm{L}}{\begin{bmatrix} \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{bmatrix}} * \underset{\mathrm{U}}{\begin{bmatrix} \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots \end{bmatrix}}$$

gdzie:

L – macierz trójkątna dolna (l_{ij}=0 dla $j<i$)

U- macierz trójątna górna (u_{ij}=0 dla $i<j$)

c.d. 3. Metody dekompozycyjne

Taki rozkład można przeprowadzić, kiedy wszystkie minory główne macierzy są różne od zera. Można zrobic to na n sposobów, obierając dowolnie *n* elementów na głównej przekątnej macierzy ***L*** lub ***U***. Od doboru elementów zależy sposób rozwiązanie problemu.

Układ równań

$$\underset{n*n}{\mathrm{A}}\ \underset{n*1}{\mathrm{X}} = \underset{n*1}{\mathrm{P}}$$

W metodach dekompozycyjnych rozwiązujemy posługując się podstawieniem

$$\underset{n*n}{\mathrm{L}}\ \underset{n*n}{\mathrm{U}}\ \underset{n*1}{\mathrm{X}} = \underset{n*1}{\mathrm{P}}$$

c.d. 3. Metody dekompozycyjne

Oznaczając $\underset{n*n}{\mathrm{U}}\ \underset{n*1}{\mathrm{X}} = \underset{n*1}{\mathrm{Z}}$ wyjściowy układ zastępujemy przez dwa układy o trójkątnych macierzach współczynników .

$$\underset{n*n}{\mathrm{L}}\ \underset{n*1}{\mathrm{Z}} = \underset{n*1}{\mathrm{P}}$$

$$\underset{n*n}{\mathrm{U}}\ \underset{n*1}{\mathrm{X}} = \underset{n*1}{\mathrm{Z}}$$

Tak więc w metodach dekompozycyjnych rozwiązanie otrzymujemy w dwóch krokach

1) Krok w przód (dekompozycja, faktoryzacja, triangularyzacja)

$$A = L * U \quad \rightarrow \quad L, U$$

2) Podwójny krok wstecz (rekursja)

$$L * Z = P \ \rightarrow Z$$

$$U * X = Z \ \rightarrow X$$

Krok wsteczny w odróznieniu od metod eliminacyjnych , wykonujemy dwukrotnie.

c.d. 3. Metody dekompozycyjne

- 3.1. Metoda Gaussa-Doolittle'a

Metoda polega na dekompozycji macierzy ***A*** na dolną macierz trójkątną ***L*** posiadającą jedynki na głownej przekątnej i górną trójkątną macierz ***U*.**

$$\underset{n*n}{\mathrm{A}}\begin{bmatrix} \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} = \underset{n*n}{\mathrm{L}}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \dots & 1 & 0 \\ \dots & \dots & 1 \end{bmatrix} * \underset{n*n}{\mathrm{U}}\begin{bmatrix} \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots \end{bmatrix}$$

Elementy macierzy ***U*** i ***L*** wyznacza się z zależności

$$dla\ k = 1,2,\dots,n$$

$$u_{kj} = a_{kj} - \sum_{r=1}^{k-1} l_{kr} u_{rj} \qquad j = k, k+1, \dots, n$$

$$l_{ik} = \frac{a_{ik} - \sum_{r=1}^{k-1} l_{ir} u_{rk}}{u_{kk}} \qquad i = k+1, \dots, n$$

c.d. 3. Metody dekompozycyjne

W przypadku, gdy u_{kk}=0 stosuje się przestawienie wierszy.

Rekursja wykonana jest zgodnie z wzorami

$$z_k = \left(y_k - \sum_{j=1}^{k-1} l_{ir} * z_j \right) \Big/ l_{kk} \qquad k = 1,2, \dots , n$$

$$x_k = \left(z_k - \sum_{j=1}^{k-1} u_{n-k+1,n-j+1} * x_{n-j+1} \right) \Big/ u_{n-k+1,n-k+1} \quad k = 1,2, \dots, n$$

c.d. 3. Metody dekompozycyjne

3.2. Metoda Gaussa-Crouta

W tej metodzie dokonujemy dekompozycji macierzy ***A*** na dolną trójkątną macierz ***L*** i górną trójkątną macierz ***U*** posiadającą jedynki na głównej przekątnej

$$\underset{n*n}{\mathrm{A}}\begin{bmatrix} \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} = \underset{n*n}{\mathrm{L}}\begin{bmatrix} \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} * \underset{n*n}{\mathrm{U}}\begin{bmatrix} 1 & \dots & \dots \\ 0 & 1 & \dots \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Elementy macierzy ***U*** i ***L*** wyznacza się z zależności

$$dla\ k = 1{,}2, \dots, n$$

$$u_{kj} = a_{ik} - \sum_{r=1}^{k-1} l_{ir} u_{rk} \qquad j = k, k+1, \dots, n$$

$$l_{ik} = \frac{a_{kj} - \sum_{r=1}^{k-1} l_{kr} u_{rj}}{l_{kk}} \qquad i = k+1, \dots, n$$

c.d. 3. Metody dekompozycyjne

W przypadku kiedy $l_{kk}=0$ stosuje się przestawienie wierszy.

Rekursję wykonujemy według wzorów

$$z_k = \left(y_k - \sum_{j=1}^{k-1} l_{kj} * z_j \right) \Big/ l_{kk} \qquad k = 1,2, \dots ,n$$

$$x_k = \left(z_k - \sum_{j=1}^{k-1} u_{n-k+1,n-j+1} * x_{n-j+1} \right) \Big/ u_{n-k+1,n-k+1} \qquad k = 1,2, \dots ,n$$

c.d. 3. Metody dekompozycyjne

- ## 3.3. Metoda Choleskiego (Banachiewicza)

Metoda może być stosowana, gdy macierz współczynników jest symetryczna i dodatnio określona. Macierz rozkładamy na dwie jednakowe macierze trójkątne

$$A = S * S^T$$

Poszczególne składowe elementy macierzy S wyznaczamy z zależności

$$s_{kk} = \left(a_{kk} - \sum_{r=1}^{k-1} s_{kr}^2 \right)^{1/2}$$

$$s_{ik} = \frac{a_{ik} - \sum_{r=1}^{k-1} s_{ir} s_{kr}}{s_{kk}}$$

4. Przykłady rozwiązań

- Metody eliminacyjne:

4.1. metoda Gaussa (podejście analityczne):

Przekształcenie pełnej macierzy współczynników ***A*** do macierzy trójkątnej. Etap ten nazywany jest eliminacją lub „krokiem w przód”.

$$a_{ij}^{(k)} = a_{ij}^{(k-1)} - \frac{a_{ik}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}} \left(a_{kj}^{(k-1)} \right) \quad (1.1)$$

gdzie:

k=1,2,...,n

i=k+1,k+2,n

j=k+1,k+2,...,n+1

cd. 4. Przykłady rozwiązań

Weźmy układ równań:

$$\begin{cases} 6x_1 + 3x_2 + 6x_3 = 30 \\ 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 17 \\ 1x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 11 \end{cases}$$

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{X} = \boldsymbol{P}$$

A – macierz współczynników

X – wektor niewiadomych

P – wektor wyrazów wolnych

$$\begin{bmatrix} 6 & 3 & 6 \\ 2 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 30 \\ 17 \\ 11 \end{Bmatrix}$$

cd. 4. Przykłady rozwiązań

Tworzymy macierz rozszerzoną układu $\boldsymbol{A}^{\sim}$

$$\begin{bmatrix} 6 & 3 & 6 & 30 \\ 2 & 3 & 3 & 17 \\ 1 & 2 & 2 & 11 \end{bmatrix}$$

- pierwszy wiersz dzielimy przez $a_{11} = 6$

k=0

$$\begin{bmatrix} 1 & 0.5 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 3 & 17 \\ 1 & 2 & 2 & 11 \end{bmatrix}$$

- wiersz drugi i trzeci przekształcamy wg. wzoru (1.1)

k=1

$$\begin{bmatrix} 1 & 0.5 & 1 & 5 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{22} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix}$$

cd. 4. Przykłady rozwiązań

$$a_{21}^{(1)} = a_{21}^{(0)} - \frac{a_{21}^{(0)}}{a_{11}^{(0)}} \left(a_{11}^{(0)}\right) = 2 - \frac{2}{1} \cdot 1 = 0$$

$$a_{22}^{(1)} = a_{22}^{(0)} - \frac{a_{21}^{(0)}}{a_{11}^{(0)}} \left(a_{12}^{(0)}\right) = 3 - \frac{2}{1} \cdot 0.5 = 2$$

$$a_{23}^{(1)} = a_{23}^{(0)} - \frac{a_{21}^{(0)}}{a_{11}^{(0)}} \left(a_{13}^{(0)}\right) = 3 - \frac{2}{1} \cdot 1 = 1$$

$$a_{24}^{(1)} = a_{24}^{(0)} - \frac{a_{21}^{(0)}}{a_{11}^{(0)}} \left(a_{14}^{(0)}\right) = 17 - \frac{2}{1} \cdot 5 = 7$$

$$a_{31}^{(1)} = a_{31}^{(0)} - \frac{a_{31}^{(0)}}{a_{11}^{(0)}} \left(a_{11}^{(0)}\right) = 1 - \frac{1}{1} \cdot 1 = 0$$

$$a_{32}^{(1)} = a_{32}^{(0)} - \frac{a_{31}^{(0)}}{a_{11}^{(0)}} \left(a_{12}^{(0)}\right) = 2 - \frac{1}{1} \cdot 0.5 = 1.5$$

$$a_{33}^{(1)} = a_{33}^{(0)} - \frac{a_{31}^{(0)}}{a_{11}^{(0)}} \left(a_{13}^{(0)}\right) = 2 - \frac{1}{1} \cdot 1 = 1$$

$$a_{34}^{(1)} = a_{34}^{(0)} - \frac{a_{31}^{(0)}}{a_{11}^{(0)}} \left(a_{14}^{(0)}\right) = 11 - \frac{1}{1} \cdot 5 = 6$$

cd. 4. Przykłady rozwiązań

$$\begin{bmatrix} 1 & 0.5 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & 1 & 7 \\ 0 & 1.5 & 1 & 6 \end{bmatrix}$$

- teraz drugi wiersz dzielimy przez $a_{22} = 2$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0.5 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 0.5 & 3.5 \\ 0 & 1.5 & 1 & 6 \end{bmatrix}$$

- wiersz trzeci przekształcamy wg. wzoru (1.1)

k=2

$$\begin{bmatrix} 1 & 0.5 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 0.5 & 3.5 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix}$$

cd. 4. Przykłady rozwiązań

$$a_{31}^{(2)} = a_{31}^{(1)} - \frac{a_{32}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}\left(a_{21}^{(1)}\right) = 0 - \frac{1.5}{1} \cdot 0 = 0$$

$$a_{32}^{(2)} = a_{32}^{(1)} - \frac{a_{32}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}\left(a_{22}^{(1)}\right) = 1.5 - \frac{1.5}{1} \cdot 1 = 0$$

$$a_{33}^{(2)} = a_{33}^{(1)} - \frac{a_{32}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}\left(a_{23}^{(1)}\right) = 1 - \frac{1.5}{1} \cdot 0.5 = 0.25$$

$$a_{34}^{(2)} = a_{34}^{(1)} - \frac{a_{31}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}\left(a_{24}^{(1)}\right) = 6 - \frac{1.5}{1} \cdot 3.5 = 0.75$$

cd. 4. Przykłady rozwiązań

$$\begin{bmatrix} 1 & 0.5 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 0.5 & 3.5 \\ 0 & 0 & 0.25 & 0.75 \end{bmatrix}$$

- teraz trzeci wiersz dzielimy przez $a_{33} = 0.25$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0.5 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 0.5 & 3.5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0.5 & 1 \\ 0 & 1 & 0.5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 5 \\ 3.5 \\ 3 \end{Bmatrix}$$

cd. 4. Przykłady rozwiązań

2. W drugim etapie rozwiązania znajdujemy wartości niewiadomych x_i posługując się przekształconą trójkątną macierzą współczynników

$$x_i = \frac{1}{a_{ii}^{(i-1)}}\left(a_{i,n+1} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}^{(i-1)} \cdot x_j\right) \quad (1.2)$$

gdzie:

i=n,n-1,...,1

$$x_3 = \frac{1}{a_{33}^{(2)}}\left(a_{34}^{(2)} - a_{34}^{(2)} \cdot 0\right) = \frac{1}{1}(3 - 3 \cdot 0) = 3$$

$$x_2 = \frac{1}{a_{22}^{(1)}}\left(a_{24}^{(1)} - a_{23}^{(1)} \cdot x_3\right) = \frac{1}{2}(7 - 1 \cdot 3) = 2$$

$$x_1 = \frac{1}{a_{11}^{(0)}}\left(a_{14}^{(0)} - a_{12}^{(0)} \cdot x_2\right) = \frac{1}{6}\left(30 - (3 \cdot 2 + 6 \cdot 3)\right) = 1$$

cd. 4. Przykłady rozwiązań

Rozwiązanie układu równań:

$$\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 2 \\ x_3 = 3 \end{cases}$$

Podejście analityczne do rozwiązania tego układu równań już na etapie 3 zmiennych wydaje się być żmudne…
Nietrudno wyobrazić sobie co by było, gdybyśmy musieli rozwiązać układ równań z 10 niewiadomymi.

Dlatego w dalszych rozważaniach zobaczymy w jaki sposób można zautomatyzować obliczenia za pomocą programu MATLAB.

cd. 4. Przykłady rozwiązań

- 4.1. metoda Gaussa (algorytm rozwiązania):

```
% Metoda Gaussa
clear; clc; format compact
% Wczytanie danych
A=[6 3 6; 2 3 3; 1 2 2];
P=[30 17 11];
% Weryfikacja danych
[m,n]=size(A);
[i,l]=size(P);
while m ~= n | n ~= l | i ~= 1;
    error('Bledny rozmiar zadania')
end
```

Definiowanie macierzy współczynników ***A*** i wektora wyrazów wolnych ***P***

Weryfikacja poprawności rozmiarów macierzy ***A*** i wektora ***P***

cd. 4. Przykłady rozwiązań

```
% Rozwiazanie
A(:,1+n)=P;
for i=1:n
    c=A(i,i);
    while c == 0.0
        error('Dzielenie przez zero pozycja:')
        i
    end
    A(i,i)=c-1.0;
    for k=i+1:n+1
        d=A(i,k)/c;
        for j=1:n
            A(j,k)=A(j,k)-d*A(j,i);
        end
    end
end
X=A(:,1+n)
```

Sprawdzenie, czy wartości macierzy na głównej przekątnej nie przyjmują wartości ujemnych

cd. 4. Przykłady rozwiązań

- Rozwiązanie układu równań

```
Command Window

X =

     1
     2
     3

>>
```

Jak widać, uzyskany wynik jest identyczny jak dla podejścia analitycznego.

Równie szybko można uzyskać odpowiedź nawet w wypadku bardziej złożonych układów równań.

cd. 4. Przykłady rozwiązań

- 4.2. metoda Jordana (algorytm rozwiązania):

```
% Rozwiazanie
A(:,1+n)=P;
for k=1:n
    c=A(k,k);
    while c == 0.0
        error('Dzielenie przez zero pozycja:')
        k
    end
    for j=1:n+1
        A(k,j)=A(k,j)/c;
    end
    for i=1:n
        c=A(i,k);
        for j=1:n+1
            if i ~= k
                A(i,j)=A(i,j)-c*A(k,j);
            end
        end
    end
end
X=A(:,1+n)
```

cd. 4. Przykłady rozwiązań

- 4.3. metoda Gaussa-Doolittle'a:

```
% Rozwiazanie
for k=1:n
    L(k,k)=1.0;
    for j=k:n
        su=0.0;
        for r=1:k-1
            su=su+L(k,r)*U(r,j);
        end
        U(k,j)=A(k,j)-su;
    end
    for i=k+1:n
        su=0.0;
        for r=1:k-1
            su=su+L(i,r)*U(r,k);
        end
        while U(k,k) == 0.0
            error('Dzielenie przez zero pozycja:')
            k
        end
        L(i,k)=(A(i,k)-su)/U(k,k);
    end
end
U
L
```

Definiowanie wartości dolnej trójkątnej macierzy ***L*** z jedynkami na głównej przekątnej i górnej trójkątnej macierzy ***U***

cd. 4. Przykłady rozwiązań

```
% Pierwszy krok wsteczny
for k=1:n
    su=0.0;
    for j=1:k-1
        su=su+L(k,j)*Z(j);
    end
    Z(k)=(P(k)-su)/L(k,k);
end
% Druki krok wsteczny
for k=1:n
    su=0.0;
    for j=1:k-1
        su=su+U(n-k+1,n-j+1)*X(n-j+1);
    end
    X(n-k+1)=(Z(n-k+1)-su)/U(n-k+1,n-k+1);
end
X=X'
```

cd. 4. Przykłady rozwiązań

- 4.4. metoda Gaussa-Crouta:

```
% Rozwiazanie
for k=1:n
    U(k,k)=1.0;
    for i=k:n
        su=0.0;
        for r=1:k-1
            su=su+L(i,r)*U(r,k);
        end
        L(i,k)=A(i,k)-su;
    end
    for j=k+1:n
        su=0.0;
        for r=1:k-1
            su=su+L(k,r)*U(r,j);
        end
        while L(k,k) == 0.0
            error('Dzielenie przez zero pozycja:')
            k
        end
        U(k,j)=(A(k,j)-su)/L(k,k);
    end
end
U
L
```

Definiowanie wartości dolnej macierzy trójkątnej ***L*** i górnej trójkątnej macierzy ***U*** posiadającej jedynki na głównej przekątnej

cd. 4. Przykłady rozwiązań

```
% Pierwszy krok wsteczny
for k=1:n
    su=0.0;
    for j=1:k-1
        su=su+L(k,j)*Z(j);
    end
    Z(k)=(P(k)-su)/L(k,k);
end
% Drugi krok wsteczny
for k=1:n
    su=0.0;
    for j=1:k-1
        su=su+U(n-k+1,n-j+1)*X(n-j+1);
    end
    X(n-k+1)=(Z(n-k+1)-su)/U(n-k+1,n-k+1);
end
X=X'
```

cd. 4. Przykłady rozwiązań

- 4.5. metoda Choleskiego:

TYLKO DLA MACIERZY WSPÓŁCZYNNIKÓW SYMETRYCZNEJ I DODATNIO OKREŚLONEJ !!!

```
% Rozwiazanie
for k=1:n
    su=0.0;
    for r=1:k-1
        su=su+S(k,r)*S(k,r);
    end
    c=A(k,k)-su;
    while c <=0.0
        error('Pierwiastek z liczby ujemnej w pozycji:')
        k
    end
    S(k,k)=sqrt(c);
    for i=k+1:n
        su=0.0;
        for r=1:k-1
            su=su+S(i,r)*S(k,r);
        end
        S(i,k)=(A(i,k)-su)/S(k,k);
    end
end
S
```

Rozkład macierzy współczynników ***A*** na dwie identyczne macierze trójkątne ***S***

cd. 4. Przykłady rozwiązań

```
% Pierwszy krok wsteczny
for k=1:n
    su=0.0;
    for j=1:k-1
        su=su+S(k,j)*Z(j);
    end
    Z(k)=(P(k)-su)/S(k,k);
end
Z
% Druki krok wsteczny
S=S';
for k=1:n
    su=0.0;
    for j=1:k-1
        su=su+S(n-k+1,n-j+1)*X(n-j+1);
    end
    X(n-k+1)=(Z(n-k+1)-su)/S(n-k+1,n-k+1);
end
X=X'
```

cd. 4. Przykłady rozwiązań

- Zadanie kontrolne z Metod Obliczeniowych 2011/12:

  1. Na podstawie algorytmu podanego w skrypcie napisać funkcję rozwiązującą układ równań.
  2. Współczynniki układu równań zapisać w zbiorze *dane.m*.
  3. Napisać program wczytujący zbiór z danymi, który następnie posługując się zdefiniowaną funkcją rozwiązuje układ równań.
  4. Rozwiązanie układu wyprowadzić do okna komend z poziomu programu głównego.

cd. 4. Przykłady rozwiązań

- Definiowanie funkcji:

```
function[wynik]=nazwa_funkcji(zmienna_1,zmienna_2,..,zmienna_n)
```

Nazwa funkcji powinna być taka sama jak nazwa pliku pod jaką zostanie zapisana, nie powinna zawierać polskich znaków, spacji, znaków typu)(:;- oraz nie może nazywać się tak jak funkcje wbudowane w MATLABIE np. sin

- Odwołanie się do funkcji w programie:

```
[wynik]=nazwa_funkcji(zmienna_1,zmienna_2,..,zmienna_n)
```

cd. 4. Przykłady rozwiązań

- Plik *dane.m* powinien zawierać zdefiniowaną macierz współczynników ***A*** oraz wektor wyrazów wolnych ***P***, np.

```
A=[6 3 6; 2 3 3; 1 2 2];
P=[30 17 11];
```

- Odwołanie do pliku *dane.m* w programie:

```
clear
clc

dane

[m,n]=size(A);
[i,l]=size(P);
```

Wystarczy wpisać pomiędzy kolejne linie programu odwołanie do nazwy pliku z danymi. (Uwaga – program, plik dane.m oraz funkcja powinny znajdować się w tym samym katalogu!)

Prezentacja została wykonana na podstawie skryptu:

METODY NUMERYCZNE W MECHANICE KONSTRUKCJI z przykładami w programie MATLAB

prof. dr hab. inż. Paweł Kłosowski

dr inż. Andrzej Ambroziak

Wydawnictwo Politechniki Gdańskiej, Gdańsk 2011

Materiały pomocnicze do zadania kontrolnego nr.4 z Metod Obliczeniowych zamieszczone zostaną na stronie Koła Naukowego Mechaniki Budowli

KOMBO

www.kombo.pg.gda.pl

Dziękuję za uwagę! ☺