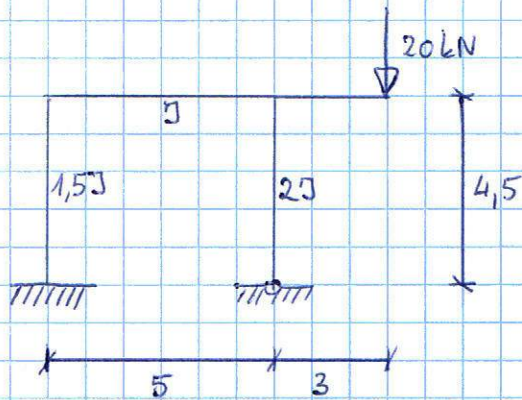
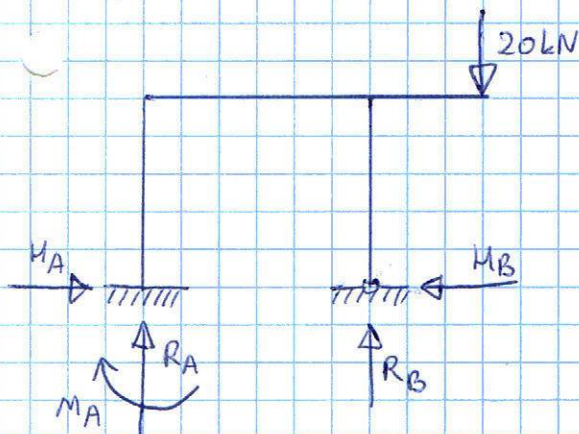


ZADANIE II

Wyznaczyć wykresy momentów zginających



① Określenie statycznej niewyznaczalności



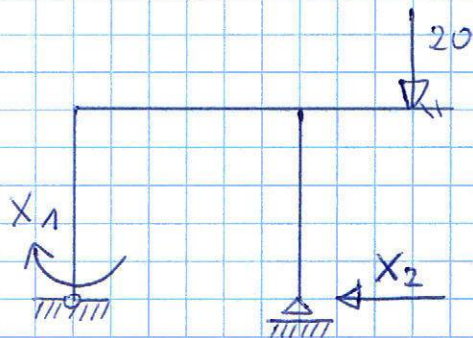
5 niewiadomych reakcji,

3 równania równowagi,

2-krotnie statycznie niewyznaczalny układ

② Utworzenie UPMS

Układ jest 2-krotnie statycznie niewyznaczalny, dlatego musimy usunąć z niego 2 więzi podporowe, np.

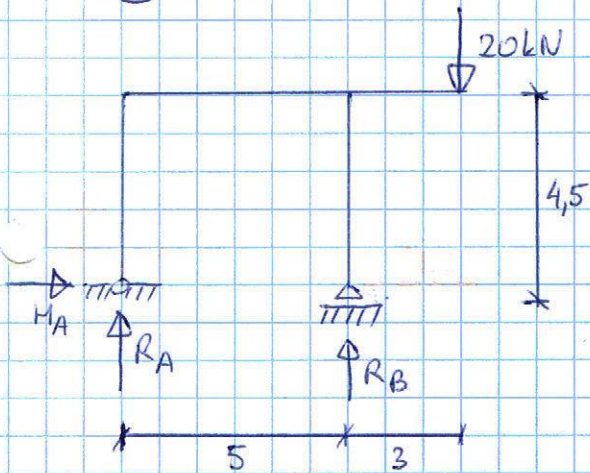


3) Obciążenie UPMS

Rozpatrujemy 2 niezależne stany obciążeń:

stan od obciążenie zeumętrzonego oraz stan od obciążenie medlisbony; w tym przypadku oddzielnie medlisbony, X_1 oraz X_2

A) Stan od obciążenie zeumętrzonego



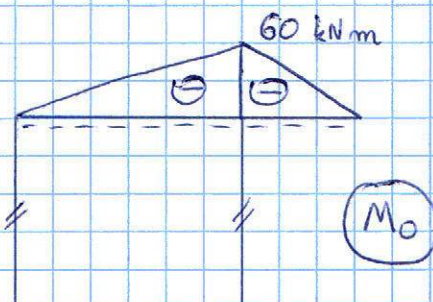
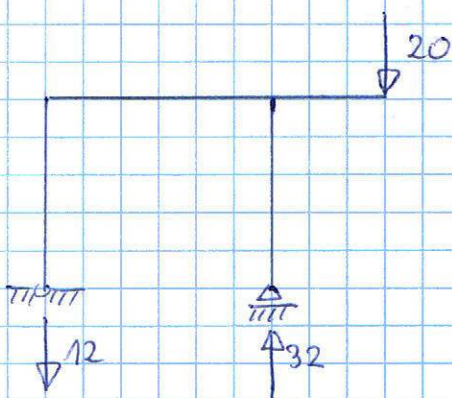
$$\sum M_A = 20 \cdot 8 - R_B \cdot 5 = 0$$

$$\Rightarrow R_B = 32$$

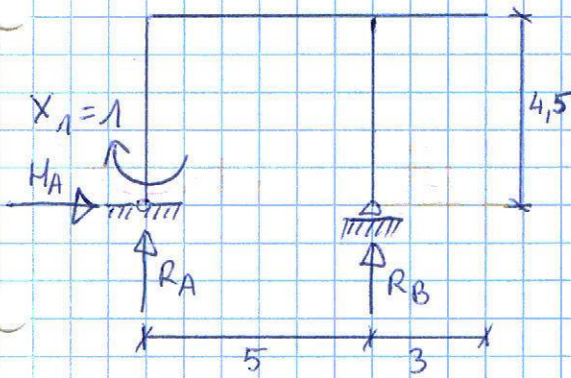
$$\sum M_B = R_A \cdot 5 + 20 \cdot 3 = 0$$

$$\Rightarrow R_A = -12$$

$$\sum P_x = 0 = M_A$$



(B) Stan od obciążenia nadłiszbowej, $X_1 = 1$ (= jednostkowe obciążenie wirtualne)



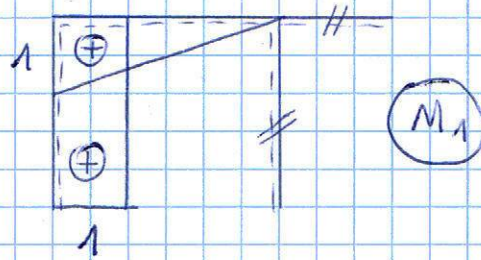
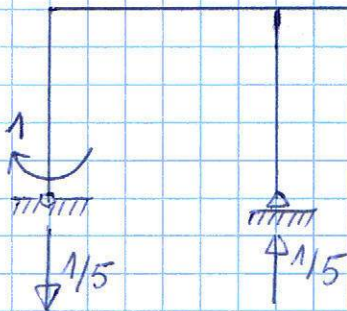
$$\sum M_A = 1 - R_B \cdot 5 = 0$$

$$\Rightarrow R_B = 1/5$$

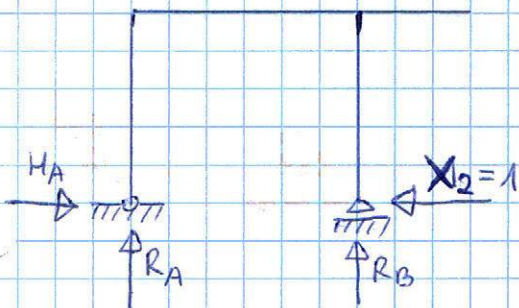
$$\sum M_B = 1 + R_A \cdot 5 = 0$$

$$\Rightarrow R_A = -1/5$$

$$\sum P_x = \underbrace{H_A}_{=0} = 0$$



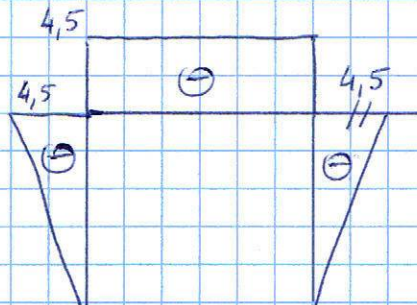
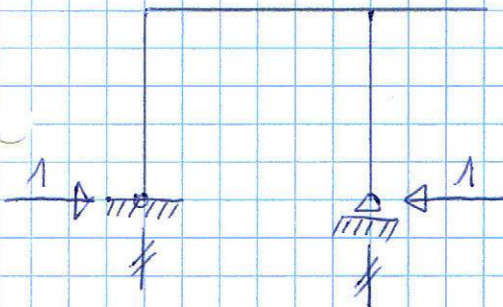
(C) Stan od obciążenia nadłiszbowej, $X_2 = 1$ (= jednostkowe obciążenie wirtualne)



$$\sum M_A = R_B \cdot 5 = 0 \Rightarrow \underline{R_B = 0}$$

$$\sum M_B = R_A \cdot 5 = 0 \Rightarrow \underline{R_A = 0}$$

$$\sum P_x = H_A - 1 = 0 \Rightarrow \underline{H_A = 1}$$



4) Równanie zgodności przemieszczeń

1) zmienne kąta obrotu w punkcie A

Na jego teoretyczną zmienną, ma wpływ:

→ obciążenie zewnętrzne $\rightarrow \delta_{10}$

→ obciążenie nadłisbowe $X_1 \rightarrow \delta_{11}$

→ obciążenie nadłisbowe $X_2 \rightarrow \delta_{12}$

UWAGA!

δ_{xy}

x - miejsce przemieszczenia / przesuwu = miejsce przyłożenia jednostkowego obciążenie wirtualnego
(w naszym przykładzie pkt. A, czyli miejsce przyłożenie nadłisbowej X_1)

y - przyczyna przemieszczenia / przesuwu
(w naszym przypadku: "0" - obc. zewnętrzne,
"1" - obc. nadłisbowe X_1
"2" - obc. nadłisbowe X_2)

$$\delta_{10} + \delta_{11} X_1 + \delta_{12} X_2 = 0$$

2) przemieszczenie w punkcie B

$$\delta_{20} + \delta_{21} X_1 + \delta_{22} X_2 = 0$$

Powstał układ 2 równań z 2 niewiadomymi (X_1, X_2).

5) Wyznaczenie współczynników układu równań:

$$\delta_{10} = \int_L \frac{M_0 M_1}{EJ} ds = \frac{1}{EJ} \left[\frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 1 \cdot \left(\frac{1}{3} (-60) \right) \right] = \frac{-50}{EJ}$$

$$\delta_{20} = \int_L \frac{M_0 M_2}{EJ} ds = \frac{1}{EJ} \left[-4,5 \cdot 5 \cdot \left(\frac{1}{2} (-60) \right) \right] = \frac{675}{EJ}$$

$$\begin{aligned} \delta_{11} &= \int_L \frac{M_1 M_1}{EJ} ds = \frac{1}{1,5EJ} \left[4,5 \cdot 1 \cdot (1) \right] + \frac{1}{EJ} \left[\frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 1 \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot 1 \right) \right] = \\ &= \frac{14}{3EJ} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta_{21} = \delta_{12} &= \int_L \frac{M_1 M_2}{EJ} ds = \frac{1}{1,5EJ} \left[1 \cdot 4,5 \cdot \frac{1}{2} (-4,5) \right] + \frac{1}{EJ} \left[\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 5 \cdot (-4,5) \right] = \\ &= \frac{-13,5}{2EJ} + \frac{-22,5}{2EJ} = \frac{-18}{EJ} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta_{22} &= \int_L \frac{M_2 M_2}{EJ} ds = \frac{1}{1,5EJ} \left[\frac{1}{2} (-4,5) \cdot 4,5 \cdot \left(\frac{2}{3} (-4,5) \right) \right] + \\ &+ \frac{1}{EJ} \left[5 \cdot (-4,5) \cdot (-4,5) \right] + \frac{1}{2EJ} \left[\frac{1}{2} (-4,5) \cdot 4,5 \cdot \left(\frac{2}{3} (-4,5) \right) \right] = \\ &= \frac{20,25}{EJ} + \frac{101,25}{EJ} + \frac{30,375}{2EJ} = \frac{2187}{16EJ} \end{aligned}$$

6) Obliczenie nadmiarowych X_1, X_2

Równanie zgodności przemieszczeń

$$\begin{cases} \delta_{10} + \delta_{11} X_1 + \delta_{12} X_2 = 0 \\ \delta_{20} + \delta_{21} X_1 + \delta_{22} X_2 = 0 \end{cases}$$

przyjmie postać

$$\begin{cases} -\frac{50}{EJ} + \frac{14}{3EJ} X_1 + \left(\frac{-18}{EJ}\right) X_2 = 0 & / \cdot \frac{27}{7} \quad / \cdot EJ \\ \frac{675}{EJ} + \left(\frac{-18}{EJ}\right) X_1 + \frac{2187}{16EJ} X_2 = 0 & / \cdot EJ \end{cases}$$

$$\begin{cases} -182 \frac{6}{7} + 18 X_1 - 69 \frac{3}{7} X_2 = 0 \\ + \left\{ \begin{array}{l} 675 - 18 X_1 + \frac{2187}{16} X_2 = 0 \end{array} \right. \end{cases}$$

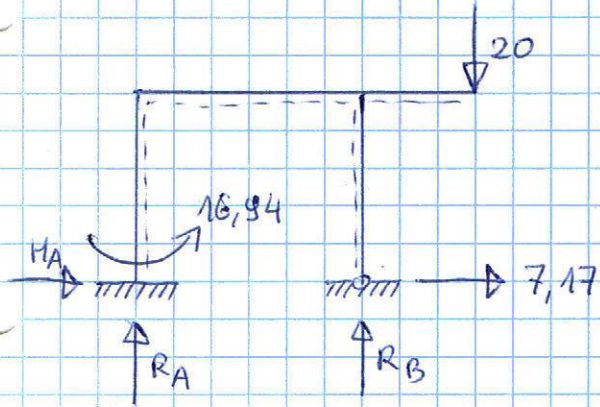
$$482 \frac{1}{7} + 67 \frac{29}{112} X_2 = 0$$

$$\underline{X_2 = -7,17}$$

$$18 X_1 = 675 + \frac{2187}{16} (-7,17)$$

$$\underline{X_1 = -16,94}$$

7) Obliczenie pozostałych niewiadomych
& narysowanie wykresu



$$\sum M_A = 16,94 + R_B \cdot 5 - 20 \cdot 8 = 0$$

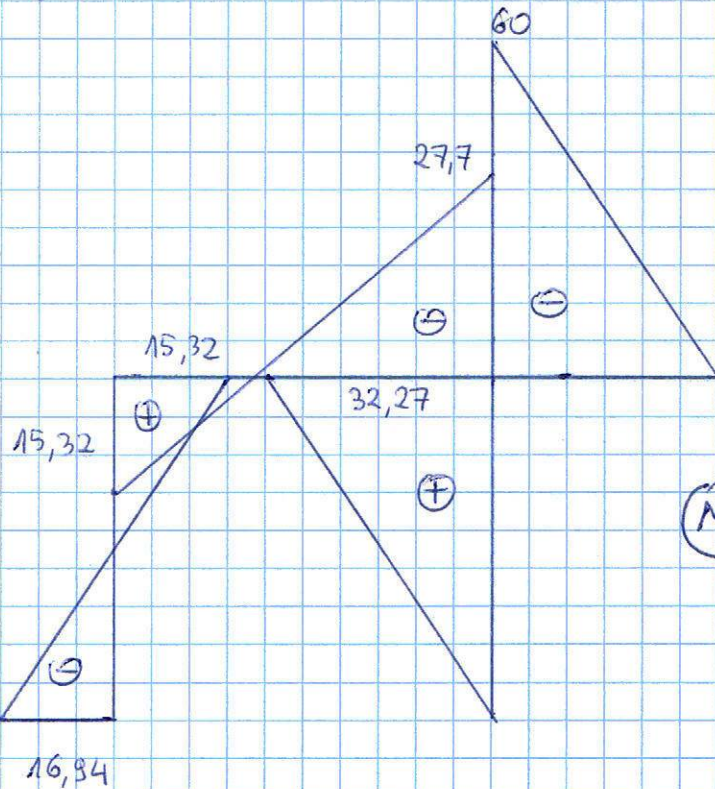
$$R_B = 28,61$$

$$\sum M_B = 16,94 - R_A \cdot 5 - 20 \cdot 3 = 0$$

$$R_A = 8,61$$

$$\sum P_x = H_A + 7,17 = 0$$

$$H_A = -7,17$$



M x kNm