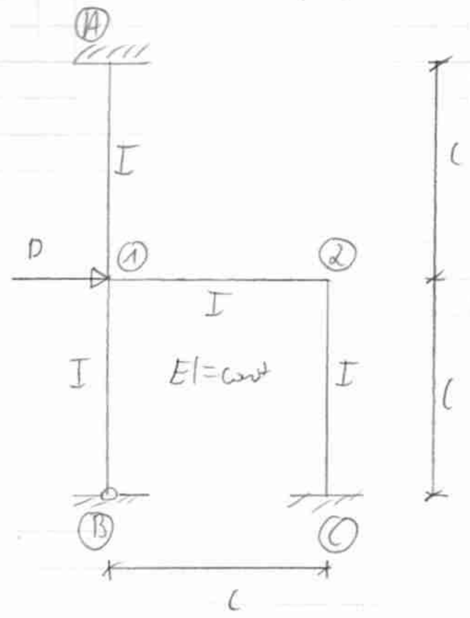
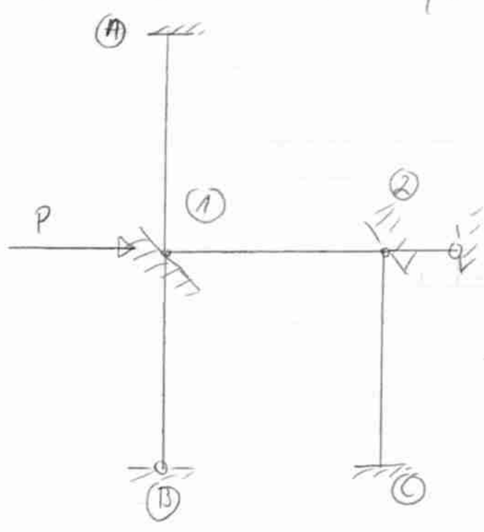
Zad. Rozwiązać metodą przemieszczeń poniższą ramę (wykres M)



1° Określenie geometrycznej niewyznaczalności układu
Układ jest trzykrotnie geometrycznie niewyznaczalny
$n_g = 3$ $(\varphi_1, \varphi_2, \Delta_2)$
- kąt obrotu węzła 1
- kąt obrotu węzła 2
- przesuw poziomy Δ

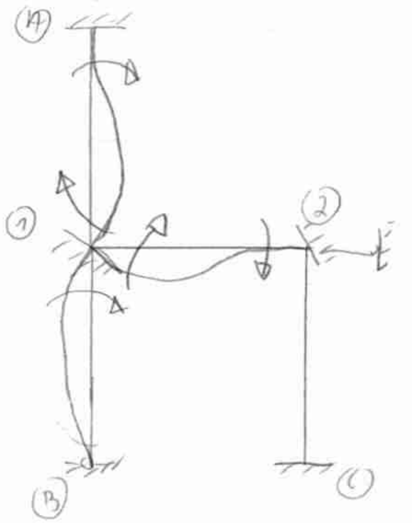
2° Stworzenie układu podstawowego metody przemieszczeń (UPMP)
[Zablokowanie możliwych kątów obrotu i przesuwów]



3° Wyznaczenie momentów wyjściowych przywęzłowych (od obc. zewnętrznego)
- Brak obciążenia międzywęzłowego czyli brak momentów wyjściowych!

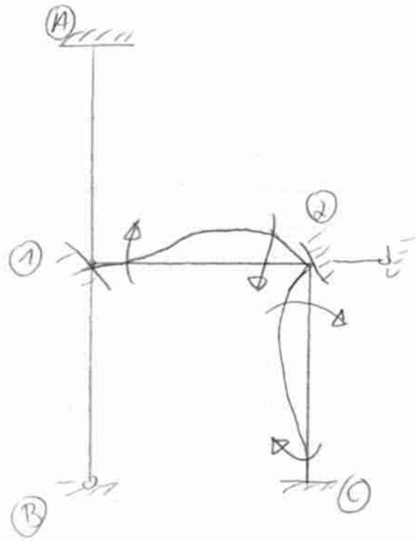
4° Wyznaczenie przywęzłowych momentów od jednostkowych wymuszeń

- Stan $\varphi_1 = 1$



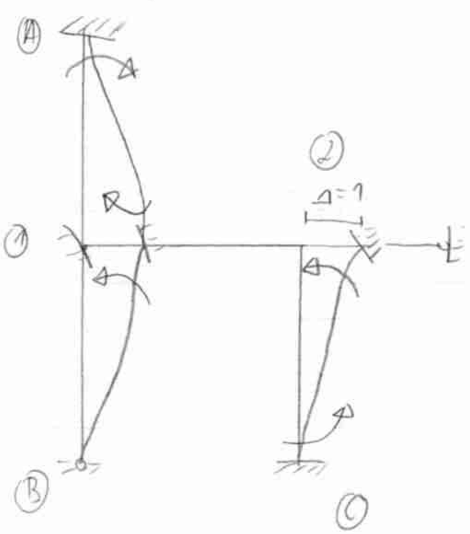
$$M_{A1} = \frac{2EI}{l}\varphi_1$$
$$M_{1A} = \frac{4EI}{l}\varphi_1$$
$$M_{1B} = \frac{3EI}{l}\varphi_1$$
$$M_{12} = \frac{4EI}{l}\varphi_1$$
$$M_{21} = \frac{2EI}{l}\varphi_1$$

- Stan $\varphi_2 = 1$



$$M_{12} = \frac{2EI}{l}\varphi_2$$
$$M_{21} = \frac{4EI}{l}\varphi_2$$
$$M_{2C} = \frac{4EI}{l}\varphi_2$$
$$M_{C2} = \frac{2EI}{l}\varphi_2$$

- Stan $\Delta_2 = 1$



$$M_{A1} = \frac{6EI}{l^2}\Delta_2 \qquad M_{1A} = \frac{6EI}{l^2}\Delta_2$$
$$M_{1B} = \frac{-3EI}{l^2}\Delta_2$$
$$M_{2C} = \frac{-6EI}{l^2}\Delta_2$$
$$M_{C2} = -\frac{6EI}{l^2}\Delta_2$$

5° Sumaryczne momenty

$$M_{A1} = \frac{2EI}{l}\varphi_1 + \frac{6EI}{l^2}\Delta_2$$

$$M_{1A} = \frac{4EI}{l}\varphi_1 + \frac{6EI}{l^2}\Delta_2$$

$$M_{1B} = \frac{3EI}{l}\varphi_1 - \frac{3EI}{l^2}\Delta_2$$

$$M_{12} = \frac{4EI}{l}\varphi_1 + \frac{2EI}{l}\varphi_2$$

$$M_{21} = \frac{2EI}{l}\varphi_1 + \frac{4EI}{l}\varphi_2$$

$$M_{2C} = \frac{4EI}{l}\varphi_2 - \frac{6EI}{l^2}\Delta_2$$

$$M_{C2} = \frac{2EI}{l}\varphi_2 - \frac{6EI}{l^2}\Delta_2$$

6° Wyznaczenie wartości $\varphi_1, \varphi_2, \Delta_2$

Dysponujemy 3 równaniami równowagi

$\Sigma M_1 = 0$ - równowaga momentów w węźle 1

$\Sigma M_2 = 0$ - równowaga momentów w węźle 2

$\Sigma P_{x1-2} = 0$ - równowaga sił poziomych w elemencie 1-2 w kierunku przesuwu

$$\Sigma M_1 = \frac{4EI}{l}\varphi_1 + \frac{6EI}{l^2}\Delta_2 + \frac{3EI}{l}\varphi_1 - \frac{3EI}{l^2}\Delta_2 + \frac{4EI}{l}\varphi_1 + \frac{2EI}{l}\varphi_2 = 0$$

$$\frac{11EI}{l}\varphi_1 + \frac{3EI}{l^2}\Delta_2 + \frac{2EI}{l}\varphi_2 = 0$$

$\Sigma M_2 = 0$

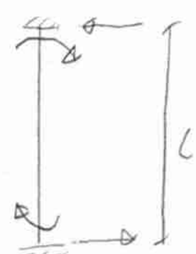
$$\Sigma M_2 = \frac{2EI}{l}\varphi_1 + \frac{4EI}{l}\varphi_2 + \frac{4EI}{l}\varphi_2 - \frac{6EI}{l^2}\Delta_2 = 0$$

$$\frac{2EI}{l}\varphi_2 - \frac{6EI}{l^2}\Delta_2 + \frac{8EI}{l}\varphi_2 = 0$$

$\Sigma P_{x1-2} = 0$

Do sprawdzenia tego warunku potrzebne są siły tnące w elementach A-1, 1-B oraz 2-C

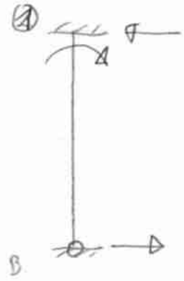
• A-1



$$T_{A1} = -\frac{M_{A1} + M_{1A}}{l} = -\left(\frac{\frac{2EI}{l}\varphi_1 + \frac{6EI}{l^2}\Delta_2 + \frac{4EI}{l}\varphi_1 + \frac{6EI}{l^2}\Delta_2}{l}\right) =$$

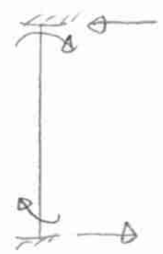
$$= -\frac{6EI}{l^2}\varphi_1 + \frac{12EI}{l^3}\Delta_2$$

• element B-1



$$T_{1B} = \frac{M_{1B}}{l} = \frac{\frac{3EI}{l}\varphi_1 - \frac{3EI}{l^2}\Delta_2}{l} = \frac{3EI}{l^2}\varphi_1 - \frac{3EI}{l^3}\Delta_2$$

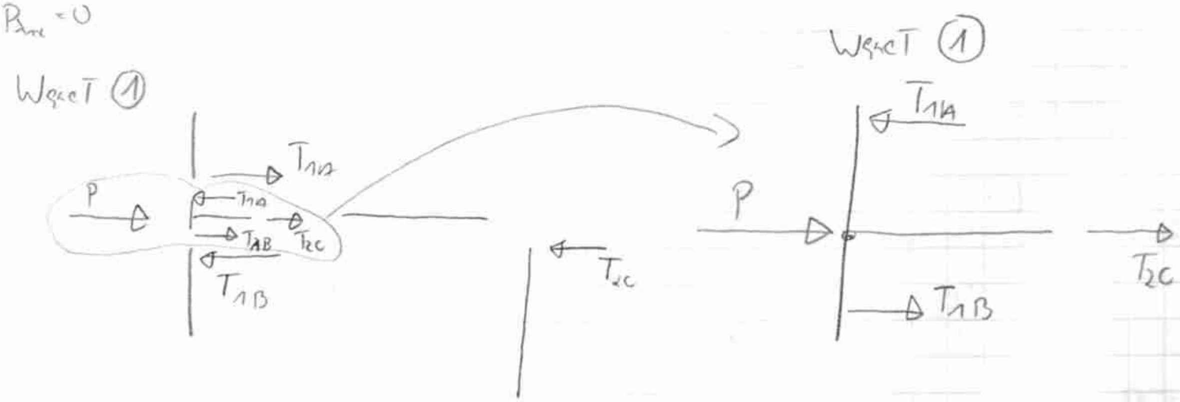
• element 2-C



$$T_{2C} = \frac{M_{2C} + M_{C2}}{l} = \frac{\frac{4EI}{l}\varphi_2 - \frac{6EI}{l^2}\Delta_2 + \frac{2EI}{l}\varphi_2 - \frac{6EI}{l^2}\Delta_2}{l}$$

$$= \frac{6EI}{l^2}\varphi_2 - \frac{12EI}{l^3}\Delta_2$$

$\Sigma P_{x1} = 0$



$\Sigma P_{x1-2} = 0$

$$P - T_{1A} + T_{1B} + T_{2C} = 0$$

$$P - \frac{6EI}{l^2}\varphi_1 - \frac{12EI}{l^3}\Delta_2 + \frac{3EI}{l^2}\varphi_1 - \frac{3EI}{l^3}\Delta_2 + \frac{6EI}{l^2}\varphi_2 - \frac{12EI}{l^3}\Delta_2 = 0$$

$$P = \frac{3EI}{l^2}\varphi_1 + \frac{27EI}{l^3}\Delta_2 - \frac{6EI}{l^2}\varphi_2$$

Mamy układ 3 równań z 3 niewiadomymi

$$\begin{cases} \frac{11EI}{l}\varphi_1 + \frac{3EI}{l^2}\Delta_2 + \frac{2EI}{l}\varphi_2 = 0 \\ \frac{2EI}{l}\varphi_1 - \frac{6EI}{l^2}\Delta_2 + \frac{8EI}{l}\varphi_2 = 0 \\ \frac{3EI}{l^2}\varphi_1 + \frac{27EI}{l^3}\Delta_2 - \frac{6EI}{l^2}\varphi_2 = P \end{cases}$$

Układ rozwiązujemy jedną z metod (ja wybrałem metodę współczynników - rozwiązanie w załączniku Z-1)

Rozwiązanie

$$\varphi_1 = -\frac{1}{48}\frac{Pl^2}{EI}$$

$$\Delta_2 = \frac{84}{1728}\frac{Pl^3}{EI}$$

$$\varphi_2 = \frac{1}{24}\frac{Pl^2}{EI}$$

7° Wyznaczenie momentów przywęzłowych (zależnych od $\varphi_1, \varphi_2, \Delta_2$)

$$M_{A1} = \left(2 \cdot -\frac{1}{48} + 6 \cdot \frac{84}{1728}\right) \cdot Pl = \frac{1}{4} Pl$$

$$M_{1A} = \left(4 \cdot -\frac{1}{48} + 6 \cdot \frac{84}{1728}\right) \cdot Pl = \frac{5}{24} Pl$$

$$M_{1B} = \left(3 \cdot -\frac{1}{48} - 3 \cdot \frac{84}{1728}\right) Pl = -\frac{5}{24} Pl$$

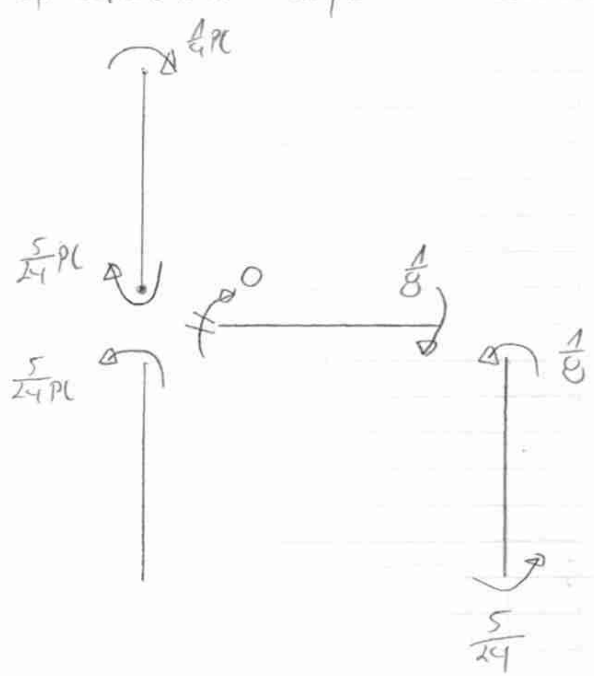
$$M_{12} = \left(4 \cdot -\frac{1}{48} + 2 \cdot \frac{1}{24}\right) Pl = 0$$

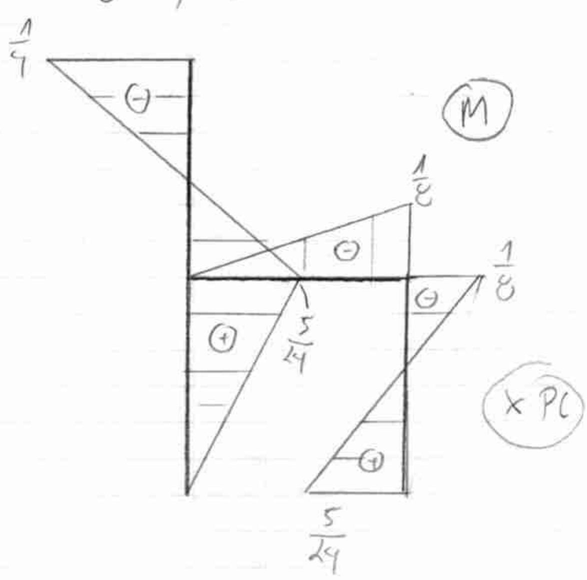
$$M_{21} = \left(2 \cdot -\frac{1}{48} + 4 \cdot \frac{1}{24}\right) Pl = \frac{1}{8} Pl$$

$$M_{2C} = \left(4 \cdot \frac{1}{24} - 6 \cdot \frac{84}{1728}\right) \cdot Pl = -\frac{1}{8} Pl$$

$$M_{C2} = \left(2 \cdot \frac{1}{24} - 6 \cdot \frac{84}{1728}\right) \cdot Pl = -\frac{5}{24} Pl$$

8° Sporządzenie wykresu momentów zginających





$$W = \begin{vmatrix} \frac{11EI}{l} & \frac{3EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} \\ \frac{2EI}{l} & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{8EI}{l} \\ \frac{3EI}{l^2} & \frac{27EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} \end{vmatrix} \begin{matrix} \frac{11EI}{l} & \frac{3EI}{l^2} \\ \frac{2EI}{l} & -\frac{6EI}{l^2} \\ \frac{3EI}{l^2} & \frac{27EI}{l^3} \end{matrix} = \frac{(EI)^3}{l^5}\left[396 + 72 + 108 + 36 - 2376 + 36\right]$$

$$= -1728\,\frac{(EI)^3}{l^5}$$

$$W_1 \begin{vmatrix} 0 & \frac{3EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} \\ 0 & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{8EI}{l} \\ P & \frac{27EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} \end{vmatrix} \begin{matrix} 0 & \frac{3EI}{l^2} \\ 0 & -\frac{6EI}{l^2} \\ P & \frac{27EI}{l^3} \end{matrix} = 0 + 24 + 0 + 12 = 36\,\frac{(EI)^2 P}{l^3}$$

$$W_2 = \begin{vmatrix} 11 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 8 \\ 3 & P & -6 \end{vmatrix} \begin{matrix} 11 & 0 \\ 2 & 0 \\ 3 & P \end{matrix} = 4 - 88 = -84\,\frac{(EI)^2 P}{l^2}$$

$$W_3 \begin{vmatrix} \frac{11EI}{l} & \frac{3EI}{l^2} & 0 \\ \frac{2EI}{l} & -\frac{6EI}{l^2} & 0 \\ \frac{3EI}{l^2} & \frac{27EI}{l^3} & P \end{vmatrix} \begin{matrix} \frac{11EI}{l} & \frac{3EI}{l^2} \\ \frac{2EI}{l} & -\frac{6EI}{l^2} \\ \frac{3EI}{l^2} & \frac{27EI}{l^3} \end{matrix} = (-66 - 6)\,\frac{(EI)^2 P}{l^3} = -72\,\frac{(EI)^2 P}{l^3}$$

$$\varphi_1 = \frac{W_1}{W} = \frac{36\,\frac{(EI)^2 P}{l^3}}{-1728\,\frac{(EI)^3}{l^5}} = \underline{\underline{-\frac{1}{48}\,\frac{Pl^2}{EI}}}$$

$$\Delta_2 = \frac{-84\,\frac{(EI)^2 P}{l^2}}{-1728\,\frac{(EI)^3}{l^5}} = 0{,}0486\,\frac{P\,l^3}{EI} = \underline{\underline{\frac{84}{1728}}}$$

$$\underline{\underline{\varphi_2 = \frac{1}{24}\,\frac{Pl^2}{EI}}}$$

$$M_{c_2} = \frac{1}{12}Pl = -0{,}20833$$

Z - 1