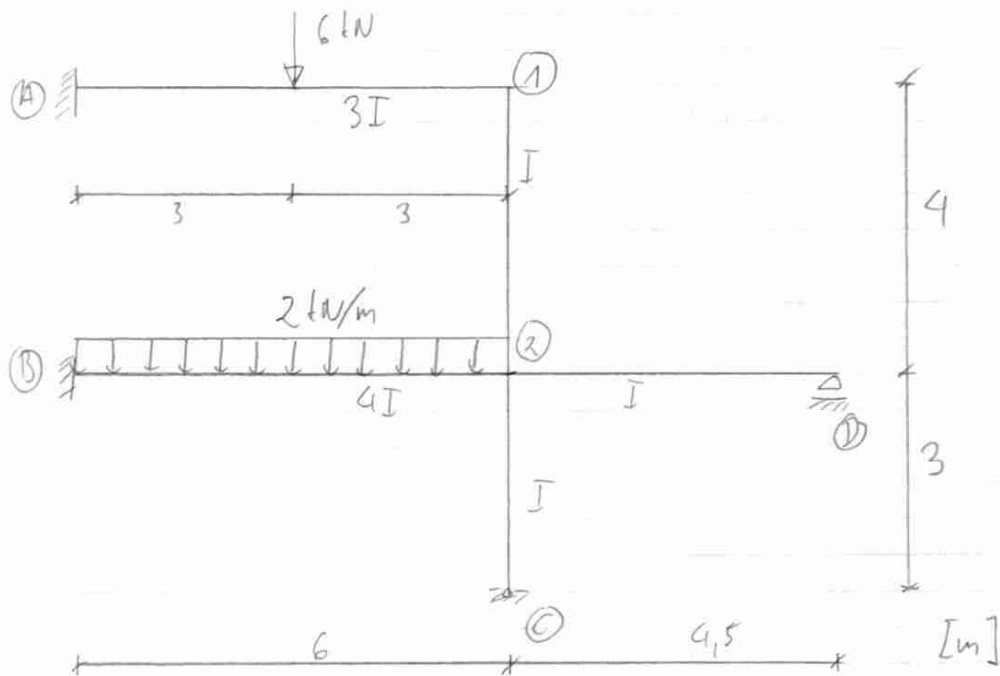


Zad. Rozwiązać metodą przemieszczeń dany układ prętowy



1^o Określenie stopnia geometrycznej nieczyrnozaczności układu

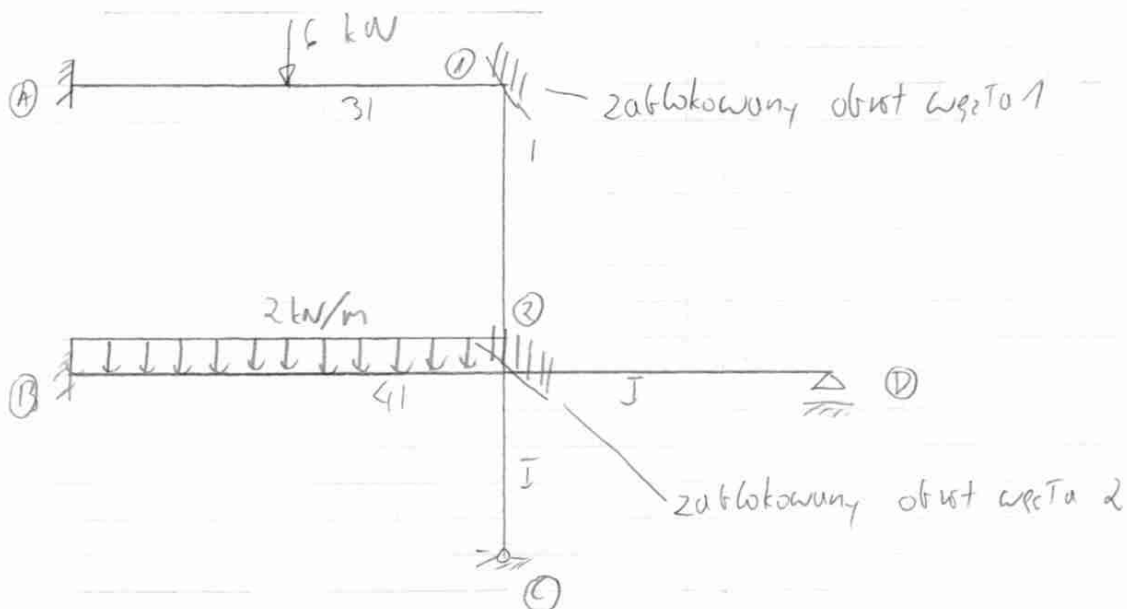
$$n_g = 2 \quad (p_1, p_2)$$

- kąt obrotu węzła 1

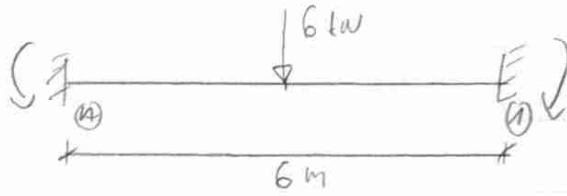
- kąt obrotu węzła 2

2^o Stworzenie układu podstawowego metodą przemieszczeń UPMP

i obliczenie przyrostowych momentów wyjściowych (al. obr. zwanego)



* Element A-1



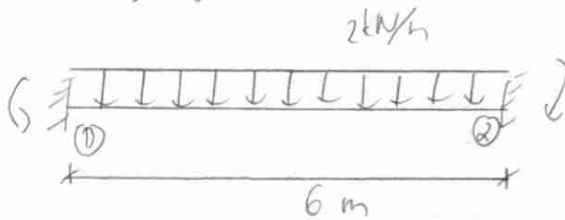
Dodatnie momenty dla MP

 Ale nie do sił wewnętrznych!

$$M_{A1}^0 = -\frac{Pl}{8} = -\frac{6 \cdot 6}{8} = -\frac{36}{8} = -\frac{9}{2} = -4,5$$

$$M_{2A}^0 = \frac{Pl}{8} = \frac{6 \cdot 6}{8} = \frac{36}{8} = 4,5$$

* Element B-2



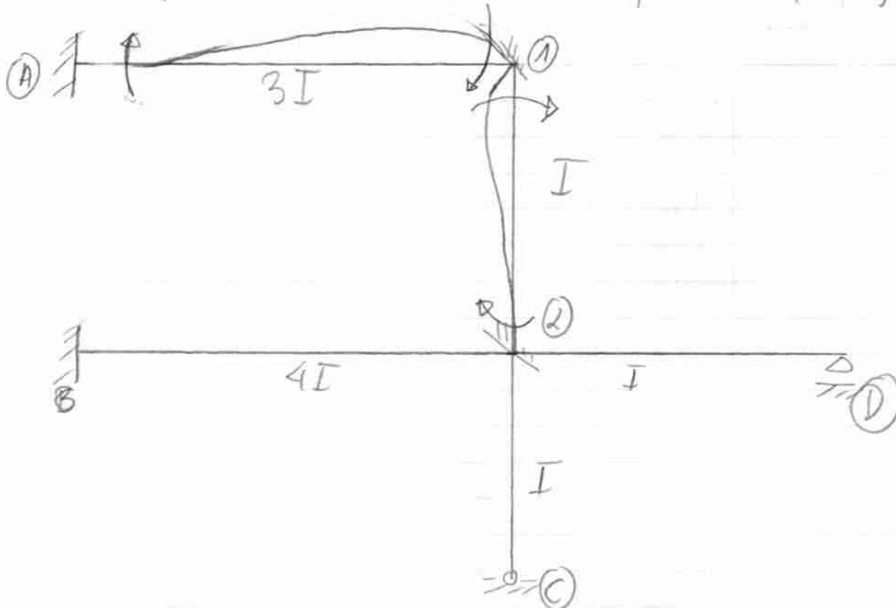
$$M_{B2}^0 = -\frac{ql^2}{12} = -6$$

$$M_{2B}^0 = \frac{ql^2}{12} = 6$$

* Pozostałe elementy - błąk obciążenia międzywęzłowego, a więc nie powstają tam momenty przywęzłowe.

3° Wyznaczenie przywęzłowych momentów at jednostkowych wymuszeń

* Stan $\varphi_1 = 1$ (obrot węzła 1 o jednostkowy kąt)



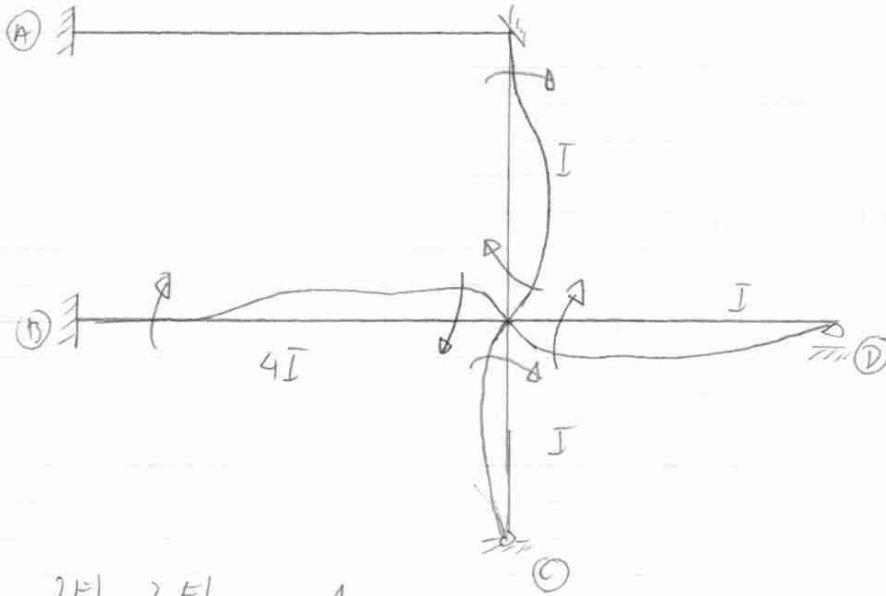
$$M_{A1} = \frac{2EI}{C} = \frac{2 \cdot 3EI}{6} \cdot p_1 = EI p_1$$

$$M_{A2} = \frac{4EI}{C} = \frac{4 \cdot 3EI}{6} \cdot p_1 = 2EI p_1$$

$$M_{B2} = \frac{4EI}{C} = \frac{4EI}{4} p_1 = EI p_1$$

$$M_{B1} = \frac{2EI}{C} = \frac{2 \cdot EI}{4} p_1 = \frac{1}{2} EI p_1$$

* Stan $p_2 = 1$ (obrot wężka z o jednostkowy kąt)



$$M_{B2} = \frac{2EI}{C} = \frac{2EI}{4} p_2 = \frac{1}{2} EI p_2$$

$$M_{B1} = \frac{4EI}{C} = \frac{4EI}{4} p_2 = EI p_2$$

$$M_{2B} = \frac{4EI}{C} = \frac{4 \cdot 4EI}{6} \cdot p_2 = \frac{8}{3} EI p_2$$

$$M_{B2} = \frac{2EI}{C} = \frac{2 \cdot 4EI}{6} p_2 = \frac{4}{3} EI p_2$$

$$M_{2C} = \frac{3EI}{C} = \frac{3EI}{3} p_2 = EI p_2$$

$$M_{2D} = \frac{3EI}{C} = \frac{3EI}{4.5} p_2 = \frac{2}{3} EI p_2$$

4° Sumaryczne momenty

$$M_{A1} = -4,5 + EI p_1$$

$$M_{A2} = 4,5 + 2EI p_1$$

$$M_{B2} = EI p_1 + \frac{1}{2} EI p_2$$

$$M_{B1} = \frac{1}{2} EI p_1 + EI p_2$$

$$M_{2B} = 6 + \frac{8}{3} EI p_2$$

$$M_{B2} = -6 + \frac{4}{3} EI p_2$$

$$M_{2C} = EI p_2$$

$$M_{2D} = \frac{2}{3} EI p_2$$

5° Wyznaczenie wartości p_1, p_2

Dysponujemy 2 równaniami równowagi

1) $\sum M_1 = 0$ - równowaga momentów w węzle 1

2) $\sum M_2 = 0$ - równowaga momentów w węzle 2.

$$\begin{cases} \sum M_1 = 4,5 + 2EI p_1 + EI p_1 + \frac{1}{2} EI p_2 = 0 \\ \sum M_2 = \frac{1}{2} EI p_1 + EI p_2 + 6 + \frac{9}{3} EI p_2 + EI p_2 + \frac{2}{3} EI p_2 = 0 \end{cases}$$

układ 2 równań z dwoma niewiadomymi

$$\begin{cases} 4,5 + 3EI p_1 + 0,5EI p_2 = 0 \\ 0,5EI p_1 + \frac{16}{3} EI p_2 + 6 = 0 \quad | \cdot -6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4,5 + 3EI p_1 + 0,5EI p_2 = 0 \\ -36 - 3EI p_1 - 32EI p_2 = 0 \end{cases}$$

$$-31,5 - 31,5EI p_2 = 0 \rightarrow p_2 = -1,0 \quad |EI$$

$$4,5 + 3EI p_1 + 0,5 \cdot (-1) = 0 \rightarrow p_1 = -\frac{4}{3} \quad |EI$$

6° Wyznaczenie wartości momentów sumarycznych

$$M_{A1} = -4,5 + -1,3333 \cdot EI \cdot EI = -5,03 \quad [kNm]$$

$$M_{A2} = 4,5 + 2 \cdot -1,3333 = 1,84$$

$$M_{A3} = -1,3333 + 0,5 \cdot (-1) = -1,84$$

$$M_{A4} = 0,5 \cdot (-1,3333) - 1,0 = -1,67$$

$$M_{B1} = 6 - \frac{9}{3} \cdot 1 = 3,333$$

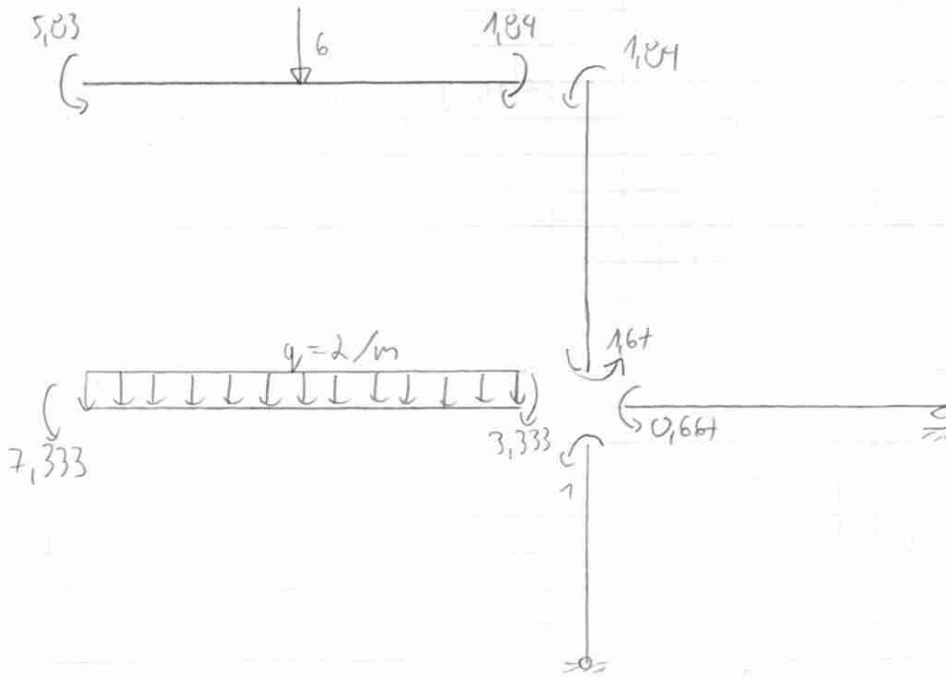
$$M_{B2} = -6 - \frac{4}{3} \cdot 1 = -7,333$$

$$M_{B3} = -1 = -1$$

$$M_{B4} = \frac{2}{3} \cdot (-1) = -0,667$$

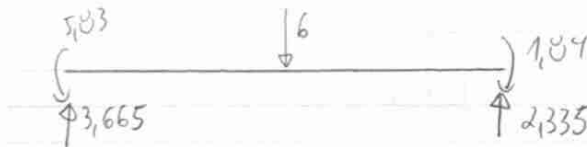
7° Wyznaczenie wykresu sił wewnętrznych

* Nанosimy na rysunek wyznaczone momenty



* Obliczamy pozostałe siły w poszczególnych elementach

• A-1



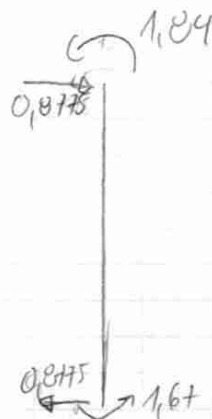
$$\sum M_A = 0 \quad -5,03 + R_A \cdot 6 - 6 \cdot 3 + 1,04 = 0$$

$$R_A = \underline{3,665}$$

$$\sum M_B = 0 \quad -5,03 + 6 \cdot 3 + 1,04 - R_B \cdot 6 = 0$$

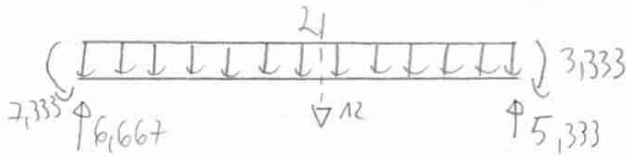
$$R_B = \underline{2,335}$$

• 1-2



$$\sum M = 0 \quad -1,04 + 9 \cdot R_1 + 1,67 = 0 \quad R_1 = \underline{0,875}$$

• Element B-2



$$\sum M_2 = 0$$

$$R_B \cdot 6 - 7,333 + 3,333 - 12 \cdot 3 = 0$$

$$R_B = 6,667$$

$$\sum M_B = 0$$

$$R_2 \cdot 6 - 3,333 - 12 \cdot 3 + 7,333 = 0$$

$$R_2 = +5,333$$

• Element 2-C



• Element 2-D



$$\sum M_D = 0$$

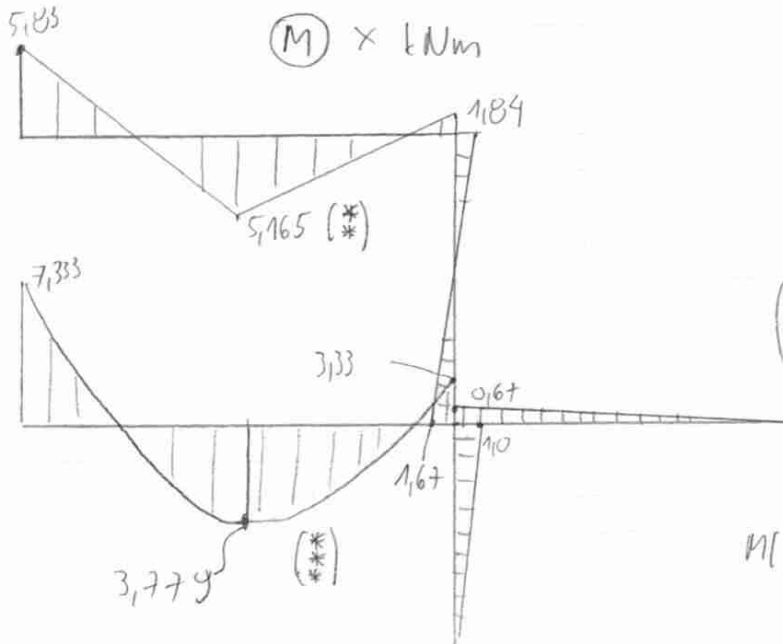
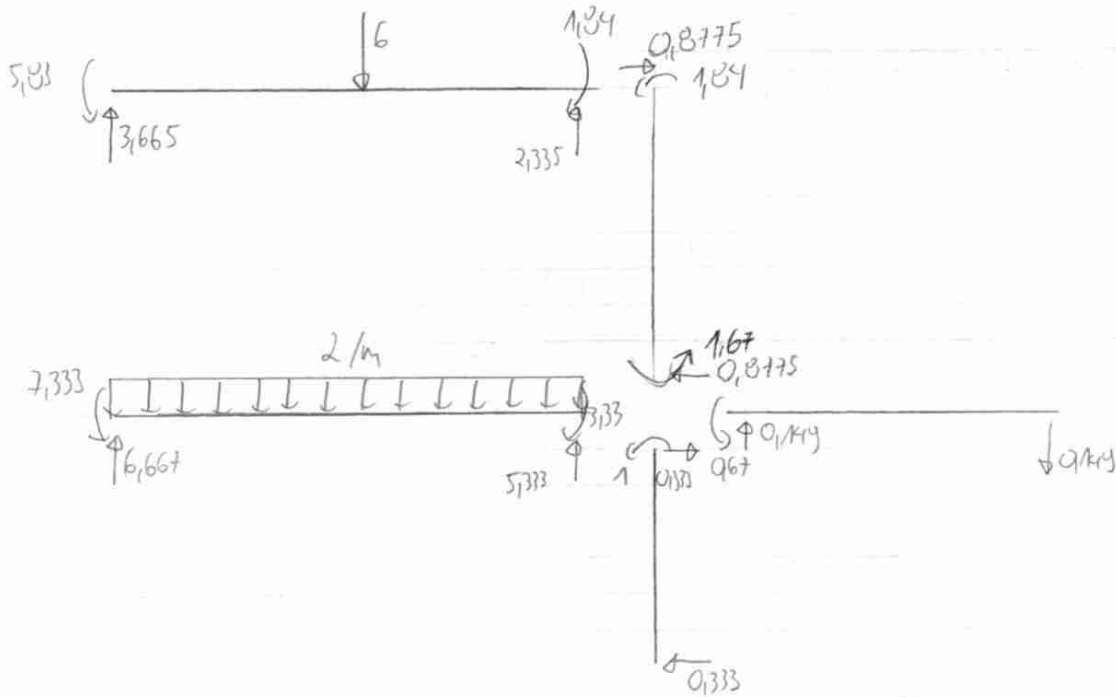
$$-0,67 + 4,5 \cdot R_2 = 0$$

$$R_2 = +0,149$$

* Nanosimy wyznaczone siły na rysunek i sporządzamy wykresy

M, T, N

Należy pamiętać że siły przekazują się między elementami z przeciwnymi znakami!



Extremale moment

$$* M(x) = -5,83 + 3,665 \cdot x$$

$$* M(3) = 5,165$$

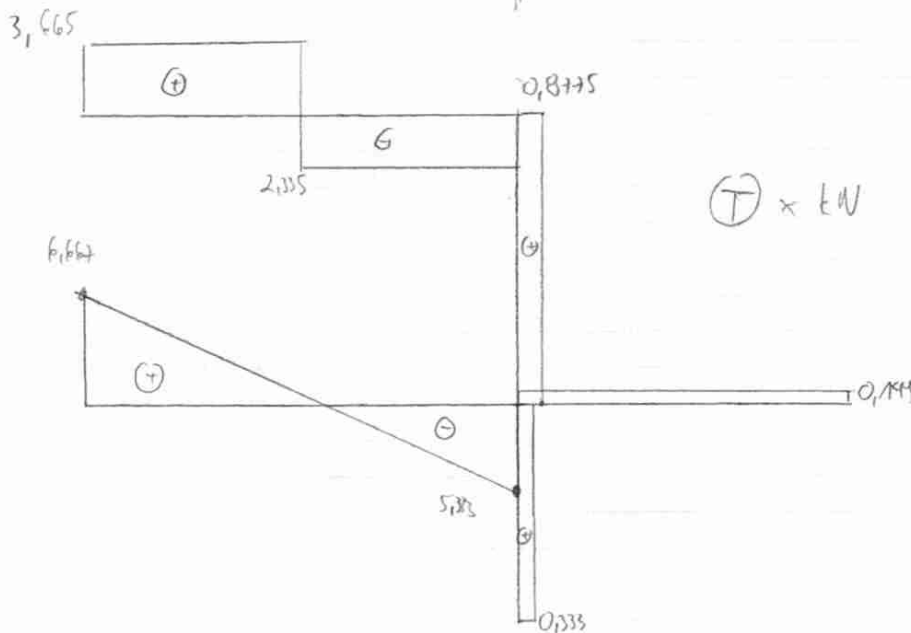
$$* M(x) = -7,333 + 6,667 \cdot x - 2 \cdot x \cdot \frac{x}{2}$$

$$* M'(x) = 6,667 - 2x = 0$$

$$x = 3,333$$

$$M(3,333) = -7,333 + 6,667 \cdot 3,333 - (3,333)^2$$

$$= \underline{3,777} \rightarrow \max M$$



(M) x LN

