LINIE WPŁYWU

MECHANIKA OGÓLNA

Nikodem Górski

ŻELAZNE zasady wyznaczania LINI WPŁYWU :

1° w liniach wpływu sił tnących na miejscu przegubu zawsze znajduje się „skok" o wartość siły P = 1 ,

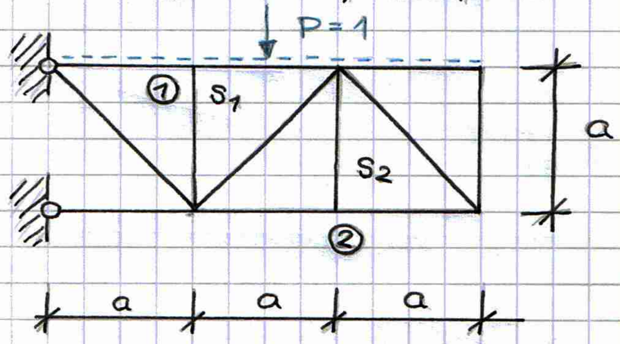
2° w liniach wpływu momentów zginających nie występują „skoki" wartości,

3° siły wew. w danym przegubie obliczane z jego obu stron mają taką samą wartość (kierujemy się zawsze ekonomią rozwiązania – najłatwsze obliczenia prowadzące do wyniku, ewentualnie obliczenia z drugiej „strony" przegubu mogą służyć za sprawdzenie),

4° w układach trójprzegubowych reakcje podporowe zmieniają się w zależności od położenia siły P=1 względem przegubu wewnętrznego (zmiana równań równowagi),

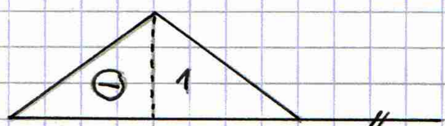
5° w układach, w których występuje „schemat pracy" należy pamiętać, że elementy obciążone, znajdujące się niżej w schemacie nie mają wpływu na siły wew. w elementach znajdujących się wyżej,

6° linie wpływu w układach statycznie wyznaczalnych są zawsze liniami prostymi, Zad. Wyznaczyć linie wpływu prętów: S_1, S_2



ROZWIĄZANIE:

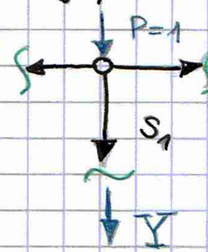
l.w. S_1
[-]



l.w. S_2
[-]

l.w. S_1

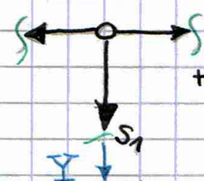
gdy siła jest w węźle ①



$+\downarrow \Sigma P_Y = 0$

$P + S_1 = 0 \rightarrow S_1 = -1$

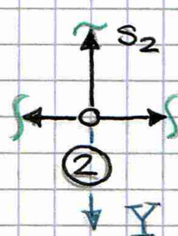
gdy jest w innym węźle
pręt S_1 staje się „prętem zerowym"



$+\downarrow \Sigma P_Y = 0 \rightarrow S_1 = 0$

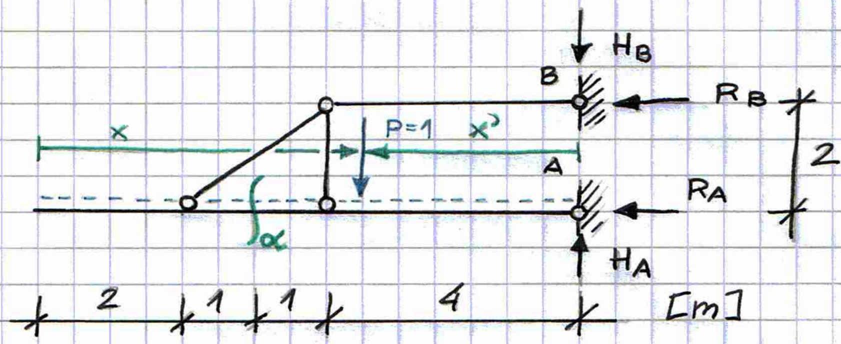
l.w. S_2

S_2 - pręt zerowy



$\downarrow_+ \Sigma P_Y = 0 \rightarrow S_2 = 0$

Zad. Wyznaczyć linie wpływu: $R_A, R_B, N_\alpha, T_\alpha, M_\alpha$



$x \in \langle 0, 8 \rangle$

$x' \in \langle 0, 8 \rangle$

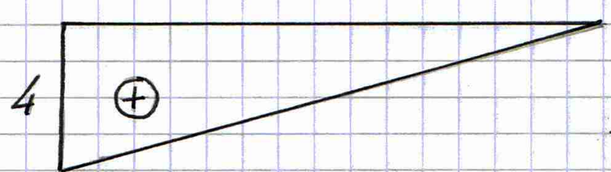
ROZWIĄZANIE:

l.w. R_A

$$\curvearrowleft^{+} \sum M_B = 0 \rightarrow R_A \cdot 2 - P \cdot x' = 0 \Big|_{P=1}$$

$$R_A = \frac{x'}{2}$$

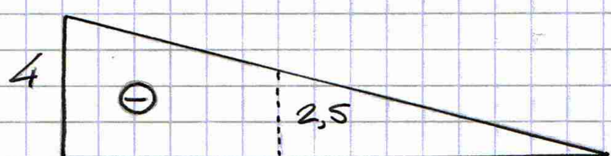
l.w. R_A [-]



l.w. R_B

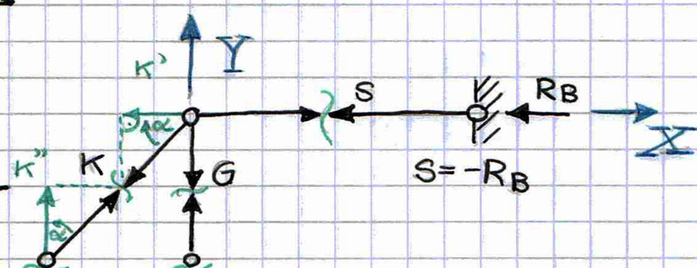
$$\curvearrowright^{+} \sum M_A = 0 \rightarrow R_B \cdot 2 + P \cdot x' = 0 \Big|_{P=1}$$

$$R_B = -\frac{x'}{2}$$

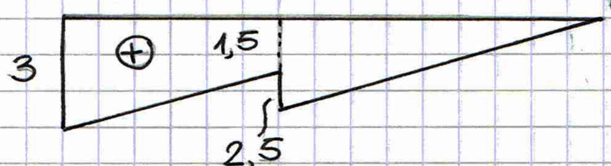


l.w. R_B [-]

l.w. T_α



l.w. T_α [-]



$$\frac{K'}{K} = \cos\alpha = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow K' = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot K$$

$$\overset{+}{\rightarrow} \sum P_X = 0 \qquad S - K' = 0$$

$$-R_B - \frac{\sqrt{2}}{2} K = 0 \rightarrow K = -\sqrt{2} \cdot R_B$$

$$K'' = K' = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot K = -R_B$$

dla siły P=1 z lewej strony przekroju α

$$T_\alpha^L = -P + K'' = -1 - R_B$$

dla $x \in \langle 0, 3 \rangle$

dla x=0

$$T_\alpha = -1 + 4 = 3$$

dla x=3

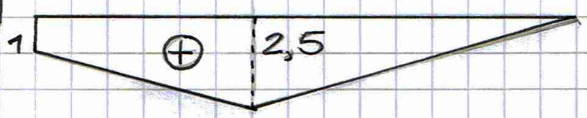
$$T_\alpha = -1 - (-2{,}5) = 1{,}5$$

dla siły P=1 z prawej strony przekroju α

$$T_\alpha^L = K'' = -R_B$$

α x $x \in \langle 0,3 \rangle$

l.w. M_α [m]



l.w. M_α

dla siły P= 1 z lewej strony przekroju α

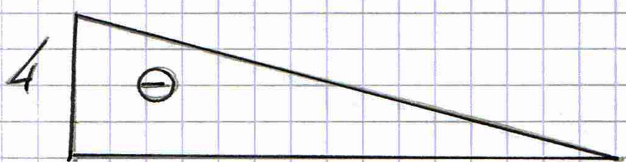
$$M_\alpha^L = K''\cdot 1 - P\cdot x'' = -R_B - x''$$

dla $x=0$ $(x''=3) \rightarrow M_\alpha = 1$

dla $x=3$ $(x''=0) \rightarrow M_\alpha = 2,5$

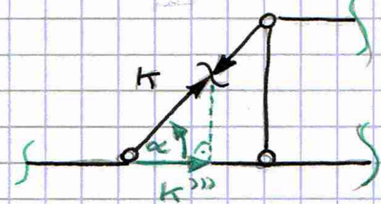
dla siły P=1 z prawej strony przekroju α

$$M_\alpha^L = K''\cdot 1 = -R_B$$



l.w. N_α [–]

l.w. N_α



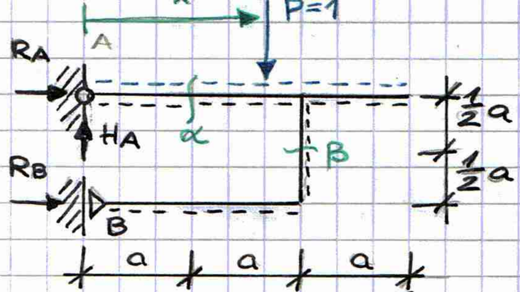
$$\frac{K'''}{K} = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow K''' = \frac{\sqrt{2}}{2} K$$

$$K''' = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(-\sqrt{2}\, R_B\right) = -R_B$$

$$N_\alpha^L = -K''' = R_B$$

dla całego przekroju!

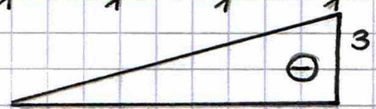
Zad. Wyznaczyć linie wpływu: R_A, R_B, H_A, M_α, T_α, N_α, M_β, T_β, N_β



ROZWIĄZANIE: $x \in \langle 0, 3a \rangle$

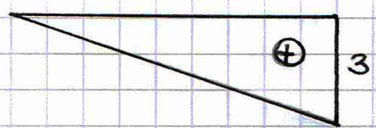
$$\curvearrowright^{+} \Sigma M_B = 0 \rightarrow R_A \cdot a + P \cdot x = 0 \Big|_{P=1} \rightarrow R_A = -\frac{x}{a}$$

$$\curvearrowright^{+} \Sigma M_A = 0 \rightarrow R_B \cdot a - P \cdot x = 0 \Big|_{P=1} \rightarrow R_B = \frac{x}{a}$$



l.w. R_A [–]

$$\uparrow^{+} \Sigma P_y = 0 \rightarrow H_A - P = 0 \Big|_{P=1} \rightarrow H_A = 1$$



l.w. R_B [–]

wyznaczenie l.w. M_α

dla siły P=1 z lewej strony przekroju α

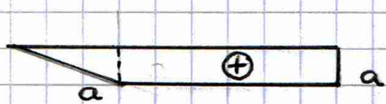
$$M_\alpha^P = R_B \cdot a \qquad x \in \langle 0, a \rangle$$

l.w. H_A [–]

dla siły P=1 z prawej strony przekroju α

$$M_\alpha^L = H_A \cdot a = a \qquad x \in \langle a, 2a \rangle$$

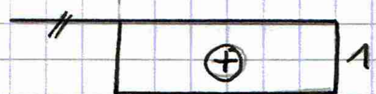
wyznaczenie l.w. T_α



l.w. M_α [m]

dla siły P=1 z lewej strony przekroju α

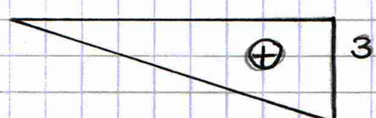
$$T_\alpha^P = 0 \qquad x \in \langle 0, a \rangle$$



l.w. T_α [–]

dla siły P=1 z prawej strony przekroju α

$$T_\alpha^L = H_A = 1 \qquad x \in \langle a, 3a \rangle$$



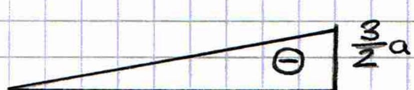
l.w. N_α [–]

wyznaczenie l.w. N_α

dla całego przedziału!

$$N_\alpha^L = -R_A$$

wyznaczenie l.w. M_β



l.w. M_β [m]

$$M_\beta^P = -\frac{1}{2} a \cdot R_B$$

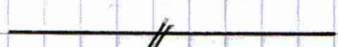
cały przedział!

l.w. T_β [–]

wyznaczenie l.w. T_β

$$T_\beta^P = -R_B$$

cały przedział!



l.w. N_β [–]

wyznaczenie l.w. N_β

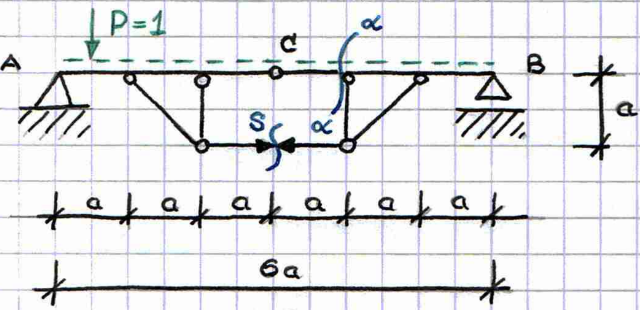
$$N_\beta^P = 0$$

cały przedział!

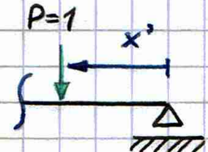
Linie Wpływu

Zad.

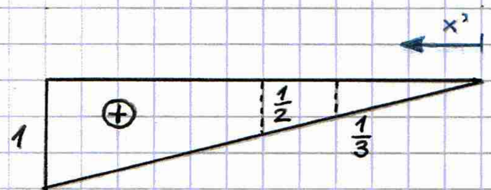
Wyznaczyć linie wpływu reakcji podporowych, siły S i sił w przekroju T_α, M_α



ROZWIĄZANIE:

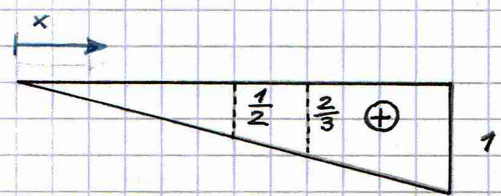


$x' \in \langle 0, 6a \rangle$

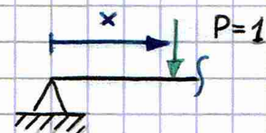


l.w. R_A [–] $\quad \overset{+}{\curvearrowleft} \Sigma M_B = 0 \quad R_A \cdot 6a - P \cdot x' = 0 \Big|_{P=1}$

$$R_A = \frac{x'}{6a}$$



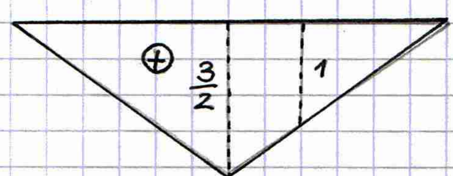
l.w. R_B [–]



$x \in \langle 0, 6a \rangle$

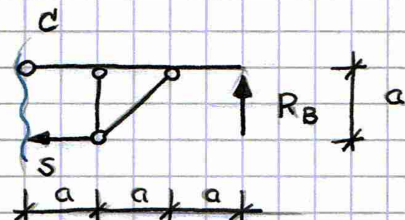
$\overset{+}{\curvearrowright} \Sigma M_A = 0 \quad R_B \cdot 6a - P \cdot x = 0 \Big|_{P=1}$

$$R_B = \frac{x}{6a}$$



l.w. S [–]

dla siły P=1 z lewej strony przegubu C

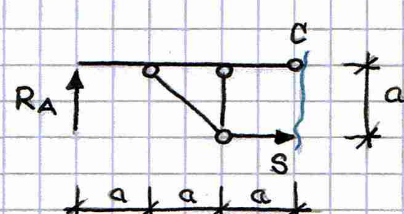


$\overset{+}{\curvearrowright} \Sigma M_C^P = 0$

$R_B \cdot 3a - S \cdot a = 0 \rightarrow S = 3 \cdot R_B$

dla $x \in \langle 0, 3a \rangle$

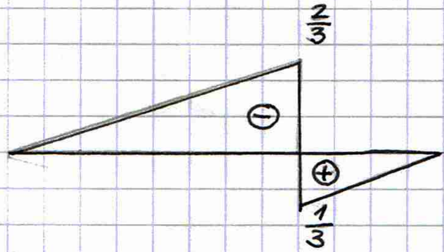
dla siły P=1 z prawej strony przegubu C



$\overset{+}{\curvearrowleft} \Sigma M_C^L = 0$

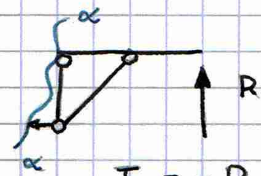
$R_A \cdot 3a - S \cdot a = 0 \rightarrow S = 3 \cdot R_A$

dla $x \in \langle 3a, 6a \rangle$



l.w. T_α

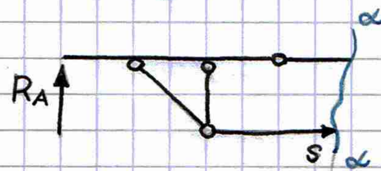
dla siły $P=1$ z lewej strony przekroju $\alpha-\alpha$



$T_\alpha = -R_B$

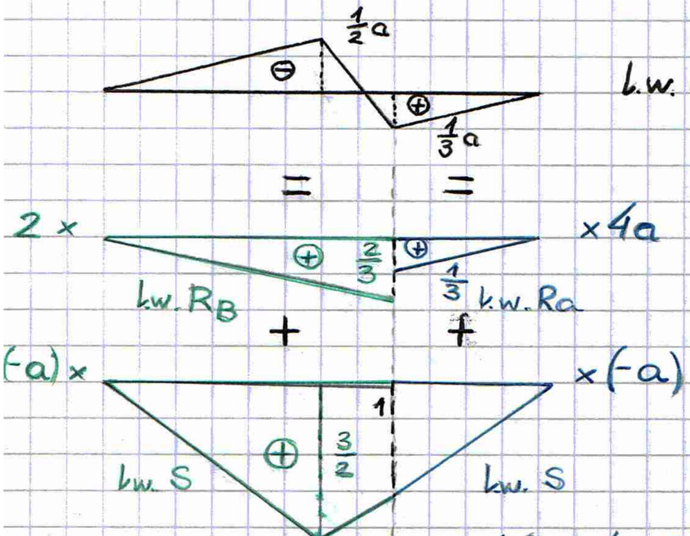
dla $x \in \langle 0, 3a \rangle$

dla siły $P=1$ z prawej strony przekroju $\alpha-\alpha$



$T_\alpha = R_A$

dla $x \in \langle 3a, 6a \rangle$

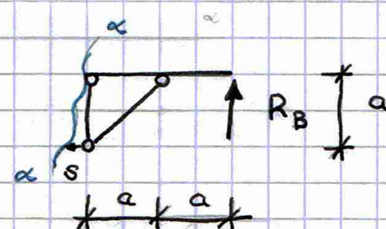


l.w. M_α

$M_\alpha = 4a \cdot Ra - S \cdot a$

$M_\alpha = 2a \cdot R_B - S \cdot a$

dla siły $P=1$ z lewej strony przekroju $\alpha-\alpha$



$M_\alpha = 2a \cdot R_B - S \cdot a$

dla $x \in \langle 0, 4a \rangle$

dla $x = 4a$

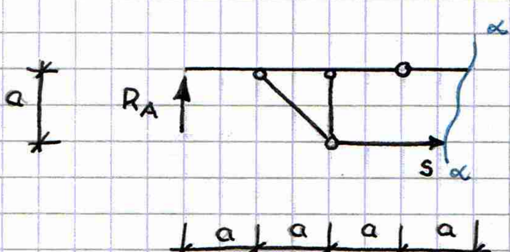
$M_\alpha = 2 \cdot a \cdot \frac{2}{3} - 1 \cdot a = \frac{1}{3}a$

dla $x = 3a$

$M_\alpha = 2 \cdot a \cdot \frac{1}{2} - \frac{3}{2} a = -\frac{1}{2}a$

dla $x = 0$

$M_\alpha = 2a \cdot 0 - 0 \cdot a = 0$



dla siły $P=1$ z prawej strony przekroju $\alpha-\alpha$

$M_\alpha = 4a \cdot Ra - S \cdot a$ dla $x \in \langle 4a, 6a \rangle$

dla $x = 4a$

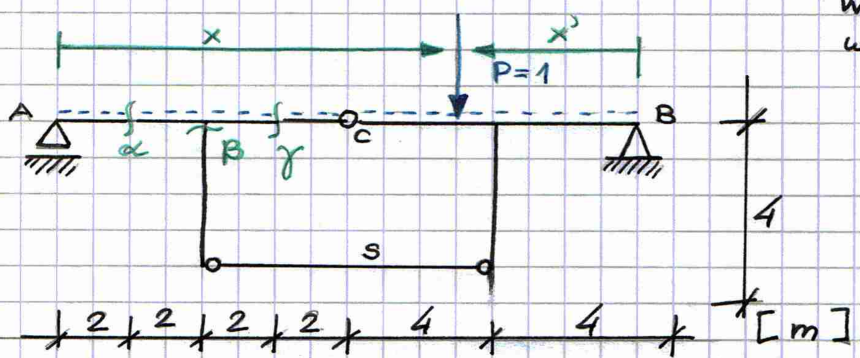
$M_\alpha = 4a \cdot \frac{1}{3} - 1 \cdot a = \frac{1}{3}a$

dla $x = 6a$

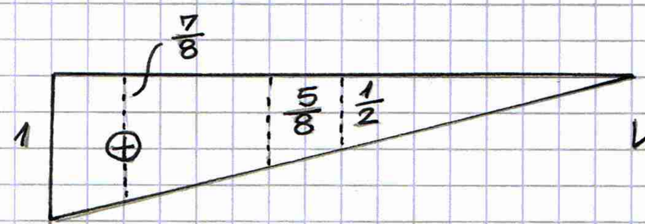
$M_\alpha = 4a \cdot 0 - 0 \cdot a = 0$

Zad.

Wyznaczyć linie wpływu wielkości: R_A, R_B, S, M_α, T_β, M_γ



ROZWIĄZANIE:

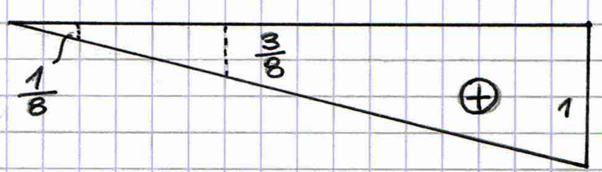


l.w. R_A [-]

$$\overset{+}{\curvearrowleft} \Sigma M_B = 0 \rightarrow R_A \cdot 16 - P \cdot x' = 0 \Big|_{P=1}$$

$$R_A = \frac{x'}{16}$$

$$x' \in \langle 0, 16 \rangle$$

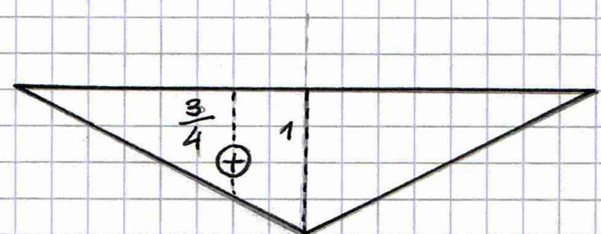


l.w. R_B [-]

$$\overset{+}{\curvearrowright} \Sigma M_A = 0 \rightarrow R_B \cdot 16 - P \cdot x = 0 \Big|_{P=1}$$

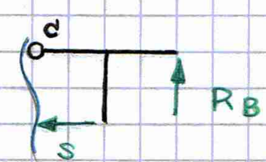
$$R_B = \frac{x}{16}$$

$$x \in \langle 0, 16 \rangle$$



l.w. S [-]

dla siły P=1 z lewej strony przegubu C



$$\overset{+}{\curvearrowright} \Sigma M_C^P = 0 \rightarrow R_B \cdot 8 - S \cdot 4 = 0$$

$$S = 2R_B$$

dla $x \in \langle 0, 8 \rangle$

l.w. M_α [m]

dla siły P=1 z prawej strony przekroju α

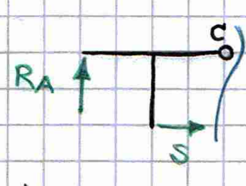
$$M_\alpha^L = 2 \cdot R_A$$

dla $x \in \langle 2, 16 \rangle$

dla siły P=1 z lewej strony przekroju α

$$M_\alpha^P = 14 \cdot R_B$$

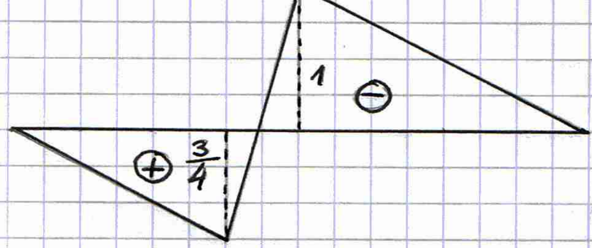
dla siły P=1 z prawej strony przegubu C



$$\overset{+}{\curvearrowleft} \Sigma M_C^L = 0 \rightarrow 8 \cdot R_A - S \cdot 4 = 0$$

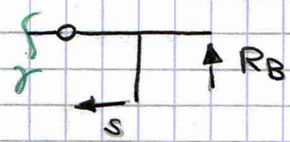
$$S = 2 \cdot R_A$$

dla $x \in \langle 8, 16 \rangle$



l.w. M_γ [m]

dla siły P=1 z lewej strony przekroju γ



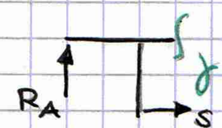
$M_\gamma^P = 10 \cdot R_B - 4 \cdot S$

dla $x \in \langle 0,6 \rangle$

dla $x=0 \rightarrow M_\gamma = 0$

dla $x=6 \rightarrow M_\gamma = 10 \cdot \frac{3}{8} - 4 \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{4}$

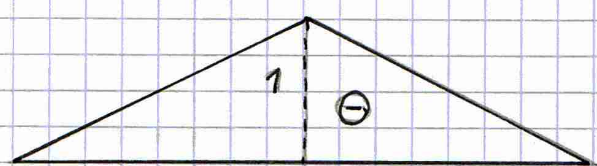
dla siły P=1 z prawej strony przekroju γ



$M_\gamma^L = 6 \cdot R_A - 4S$

dla $x \in \langle 6,16 \rangle$

dla $x=6 \rightarrow M_\gamma = 6 \cdot \frac{5}{8} - 4 \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{4}$

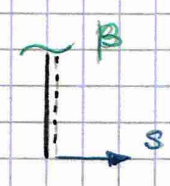


! dla $x=8$ zmiana funkcji l.w. S (załamanie na wykresie)

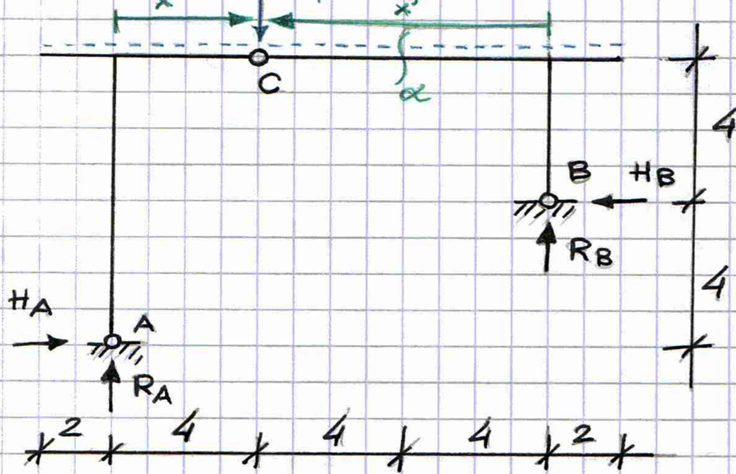
$M_\gamma = 6 \cdot \frac{1}{2} - 4 \cdot 1 = -1$

dla $x=16 \rightarrow M_\gamma = 0$

l.w. T_β [-]



$T_\beta = -S$



$x \in \langle -2, 14 \rangle$

$x' \in \langle -2, 14 \rangle$

ZAD.

Wyznaczyć linie wpływu wielkości $R_A, H_A, R_B, H_B, N_\alpha, T_\alpha, M_\alpha$

ROZWIĄZANIE:

$$\overset{+}{\rightarrow} \Sigma P_x = 0 \quad H_A - H_B = 0 \rightarrow H_A = H_B = H$$

$$\overset{+}{\curvearrowleft} \Sigma M_B = 0 \rightarrow 12 \cdot R_A - 4 \cdot H - P \cdot x' = 0 \,\Big|_{P=1}$$

$$\text{I} \qquad R_A = \frac{x'}{12} + \frac{1}{3} H$$

dla siły P=1 z lewej strony przegubu C

$$\overset{+}{\curvearrowleft} \Sigma M_C^L = 0 \rightarrow 4 R_A - 8 \cdot H - P \cdot (x' - 8) = 0 \,\Big|_{P=1}$$

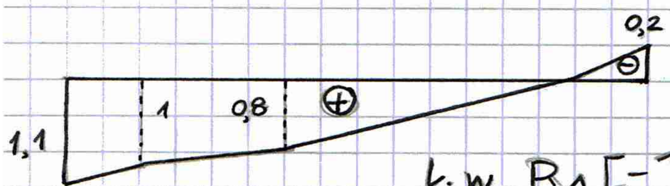
$$\text{II} \qquad H = \frac{1}{2} \cdot R_A - \frac{1}{8}(x' - 8)$$

H - wstawiamy do R_A I

$$R_A = \frac{x'}{12} + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2} \cdot R_A - \frac{x'}{8} + 1\right)$$

$$R_A = \frac{x'}{20} + \frac{2}{5}$$

dla $x' \in \langle 8, 14 \rangle$



L.w. R_A [-]

dla $x' = 14$ $\quad R_A = \frac{14}{20} + \frac{2}{5} = 1{,}1$

dla $x' = 12$ $\quad R_A = \frac{12}{20} + \frac{2}{5} = 1$

dla $x' = 8$ $\quad R_A = \frac{8}{20} + \frac{2}{5} = 0{,}8$

dla siły P=1 z prawej strony przegubu C

$$\overset{+}{\curvearrowleft} \Sigma M_C^L = 0 \rightarrow 4 R_A - 8 \cdot H = 0$$

$$\text{III} \qquad H = \frac{1}{2} R_A$$

H wstawiamy do R_A I

$$R_A = \frac{x'}{12} + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2} \cdot R_A\right) \rightarrow R_A = \frac{x'}{10}$$

dla $x \in \langle -2, 8 \rangle$

dla $x' = 8$ $\quad R_A = 0{,}8$

dla $x' = 0$ $\quad R_A = 0$

dla $x' = -2$ $\quad R_A = -0{,}2$

Wyznaczenie L.w. H

z równań I i II dla siły P=1 z lewej strony przegubu C

wstawiamy R_A I do równania II

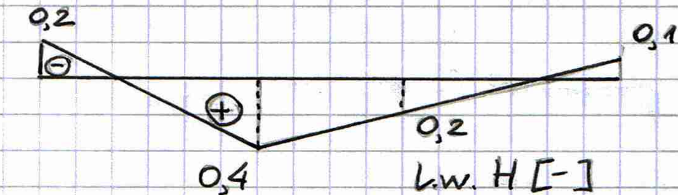
$$H = \frac{1}{2}\left(\frac{x'}{12} + \frac{1}{3} H\right) - \frac{1}{8}(x' - 8) \rightarrow H = \frac{6}{5} - \frac{x'}{10}$$

dla $x' \in \langle 8, 14 \rangle$

dla $x' = 14$ $\quad H = \frac{6}{5} - \frac{14}{10} = -0{,}2$

dla $x' = 12$ $\quad H = \frac{6}{5} - \frac{12}{10} = 0$

dla $x' = 8$ $\quad H = \frac{6}{5} - \frac{8}{10} = 0{,}4$



l.w. H [-]

dla siły P=1 z prawej strony przegubu C wstawiamy R_A (I) do równania (III)

$$H = 2\left(\frac{x'}{12} + \frac{1}{3}H\right) \rightarrow H = \frac{x'}{20}$$

dla $x' \in \langle -2, 8 \rangle$

dla $x' = 8$ $H = 0{,}4$

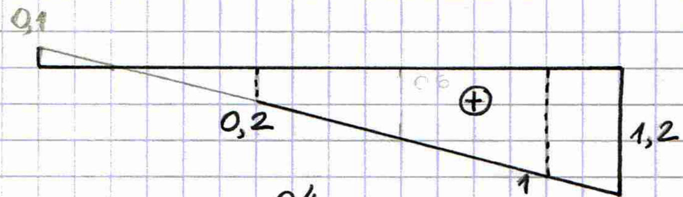
dla $x' = 4$ $H = 0{,}2$

dla $x' = 0$ $H = 0$

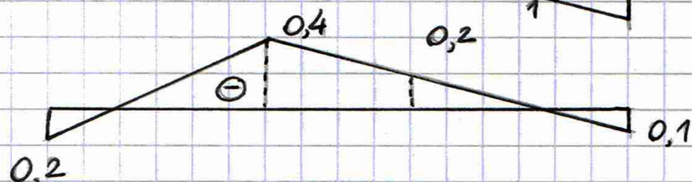
dla $x' = -2$ $H = -0{,}1$

wyznaczenie l.w. R_B

$$+\uparrow \Sigma P_y = 0 \quad R_A + R_B - 1 = 0 \rightarrow R_B = 1 - R_A$$

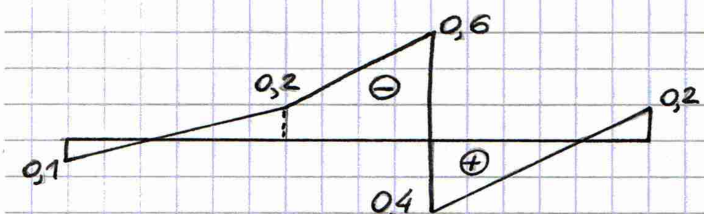


l.w. R_B [-]



l.w. N_α [-]

$N_\alpha = -H$



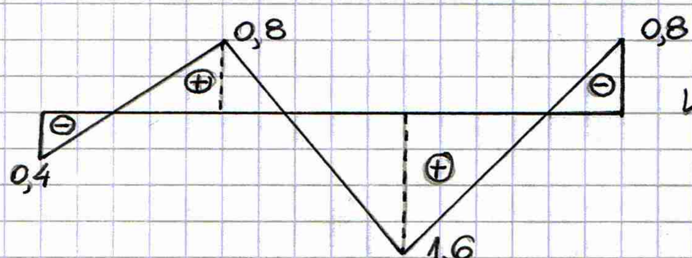
l.w. T_α [-]

dla siły P=1 z lewej strony przekroju α

$T_\alpha = R_A - 1$ dla $x' \in \langle 4, 14 \rangle$

dla siły P=1 z prawej strony przekroju α

$T_\alpha = R_A$ dla $x' \in \langle -2, 4 \rangle$



l.w. M_α [m]

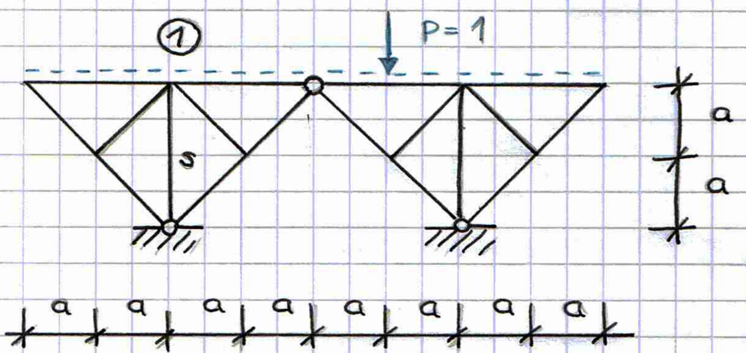
dla siły P=1 z lewej strony przekroju α

$$M_\alpha^P = 4 \cdot R_B - 4H = 4(R_B - H)$$

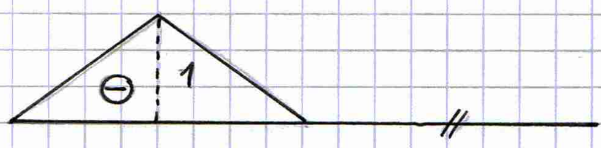
dla siły P=1 z prawej strony przekroju α

$$M_\alpha^L = 8 \cdot R_A - 8 \cdot H = 8(R_A - H)$$

Zad. Wyznaczyć linie wpływu pręta S

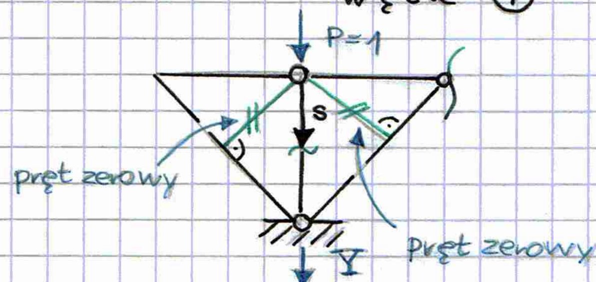


ROZWIĄZANIE:



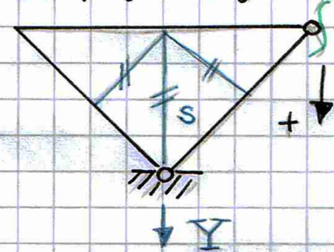
l.w. S
[-]

gdy siła P=1 jest w węźle ①



$\overset{+}{\downarrow} \Sigma P_Y = 0 \rightarrow \quad S + P = 0 \rightarrow \quad S = -1$

gdy siła P=1 jest w jakichkolwiek innych węzłach to pręt S jest „prętem zerowym"



$\overset{+}{\downarrow} \Sigma P_Y = 0 \rightarrow S = 0$